システムダイナミックス

第１２回　結合されたシステム

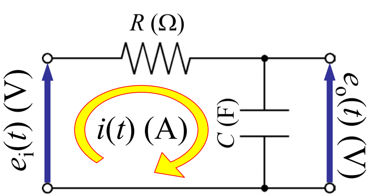
本日の授業内容

1．ＲＣ回路の結合

2．バネーマスーダンパ系の結合

3．タンクシステムの結合

ＲＣ回路



キルヒホッフの電圧の法則

$$Ri(t)+\frac{1}{C}\int i(t)dt=e_i(t) \quad (1)$$

$$e_o(t)=\frac{1}{C}\int i(t)dt \quad (2)$$

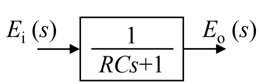
⇩ **ラプラス変換**

$$RI(s)+\frac{1}{Cs}I(s)=E_i(s) \quad (3)$$

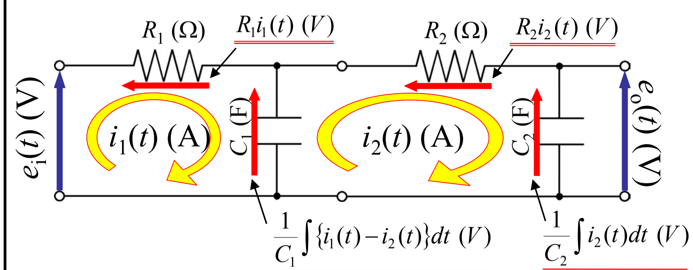
$$E_o(s)=\frac{1}{Cs}I(s) \quad (4)$$

式（３）と式（４）から $I(s)$ を消去し、伝達関数 $G(s)$ を求めると、

$$G(s)=\frac{E_o(s)}{E_i(s)}=\frac{1}{RCs+1} \quad (5)$$



ＲＣ回路の結合



キルヒホッフの電圧の法則

$$R_1i_1(t)+\frac{1}{C_1}\int\{i_1(t)-i_2(t)\}dt=e_i(t) \quad (1)$$

$$e_o(t)=\frac{1}{C_2}\int i_2(t)dt \quad (3)$$

$$R_2i_2(t)+\frac{1}{C_2}\int i_2(t)dt-\frac{1}{C_1}\int\{i_1(t)-i_2(t)\}dt=0 \quad (2)$$

式（１）〜式（３）をラプラス変換すると、

$$R_1 I_1(s) + \frac{1}{C_1 s}\{I_1(s) - I_2(s)\} = E_i(s) \qquad (4)$$

$$R_2 I_2(s) + \frac{1}{C_2 s} I_2(s) - \frac{1}{C_1 s}\{I_1(s) - I_2(s)\} = 0 \qquad (5)$$

$$E_o(t) = \frac{1}{C_2 s} I_2(s) \qquad (6)$$

式（６）より、

$$I_2(s) = C_2 s E_o(t) \qquad (7)$$

式（７）を式（４）に代入すると、

$$\left(R_1 + \frac{1}{C_1 s}\right) I_1(s) - \frac{C_2}{C_1} E_o(s) = E_i(s) \qquad (8)$$

式（６）と式（７）を式（５）に代入すると、

$$R_2 C_2 s E_o(s) + E_o(s) - \frac{1}{C_1 s} I_1(s) + \frac{C_2}{C_1} E_o(s) = 0$$

$$I_1(s) = C_1 s \left(R_2 C_2 s + 1 + \frac{C_2}{C_1}\right) E_o(s) \qquad (9)$$

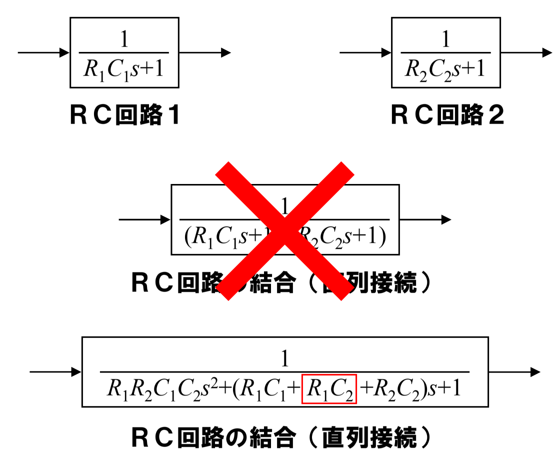
式（９）を式（８）に代入すると、

$$\left(R_1 + \frac{1}{C_1 s}\right) C_1 s \left(R_2 C_2 s + 1 + \frac{C_2}{C_1}\right) E_o(s) - \frac{C_2}{C_1} E_o(s) = E_i(s)$$

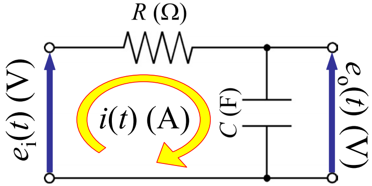
$$\left\{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2) s + 1\right\} E_o(s) = E_i(s)$$

$$\therefore G(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)}$$

$$= \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2) s + 1} \qquad (10)$$



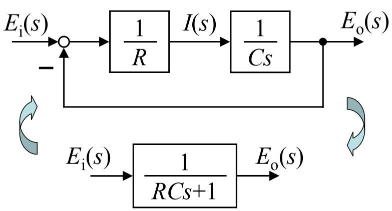
ブロック線図を使って原因を探る



キルヒホッフの電圧の法則

$$Ri(t)+\frac{1}{C}\int i(t)dt=e_i(t) \quad （１）$$

$$e_o(t)=\frac{1}{C}\int i(t)dt \quad （２）$$



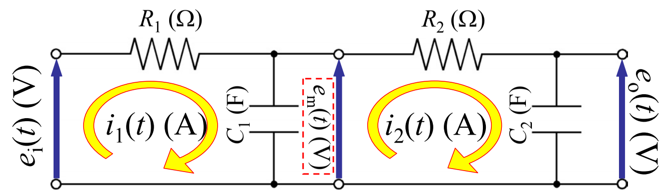
式（１）と式（２）から

$$RI(s)+E_o(s)=E_i(s)$$

$$\therefore I(s)=\frac{1}{R}\{E_i(s)-E_o(s)\}$$

式（２）から

$$E_o(s)=\frac{1}{Cs}I(s)$$



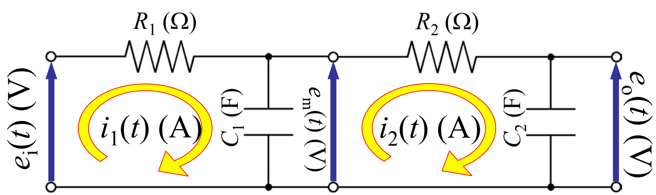
キルヒホッフの電圧の法則

$$R_1i_1(t)+\frac{1}{C_1}\int\{i_1(t)-i_2(t)\}dt=e_i(t) \quad （１）$$

$$R_2i_2(t)+\frac{1}{C_2}\int i_2(t)dt-\frac{1}{C_1}\int\{i_1(t)-i_2(t)\}dt=0 \quad （２）$$

$$e_m(t)=\frac{1}{C_1}\int\{i_1(t)-i_2(t)\}dt \quad （３）$$

$$e_o(t)=\frac{1}{C_2}\int i_2(t)dt \quad （４）$$



式（１）と式（３）から、

$$R_1I_1(s)+E_m(s)=E_i(s)$$

$$\therefore I_1(s)=\frac{1}{R_1}\{E_i(s)-E_m(s)\} \quad （５）$$

式（２）、式（３）、式（４）から、

$$R_2I_2(s)+E_o(s)-E_m(s)=0$$

$$\therefore I_2(s)=\frac{1}{R_2}\{E_m(s)-E_o(s)\} \quad （６）$$

式（３）から、

$$E_m(s)=\frac{1}{C_1s}\{I_1(s)-I_2(s)\} \quad （７）$$

式（４）から、

$$E_o(s)=\frac{1}{C_2s}I_2(s) \quad （８）$$

$$I_1(s)=\frac{1}{R_1}\{E_i(s)-E_m(s)\} \quad （５）$$

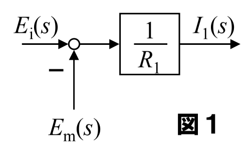


図１

$$I_2(s)=\frac{1}{R_2}\{E_m(s)-E_o(s)\} \quad （６）$$

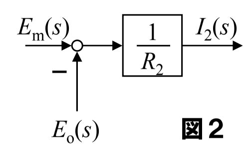


図２

$$E_m(s)=\frac{1}{C_1s}\{I_1(s)-I_2(s)\} \quad （７）$$

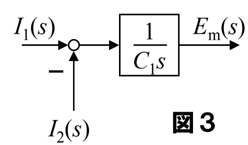


図３

$$E_o(s)=\frac{1}{C_2s}I_2(s) \quad （８）$$

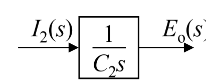
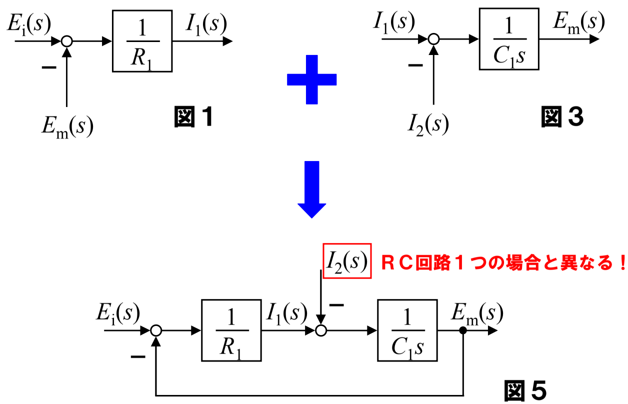
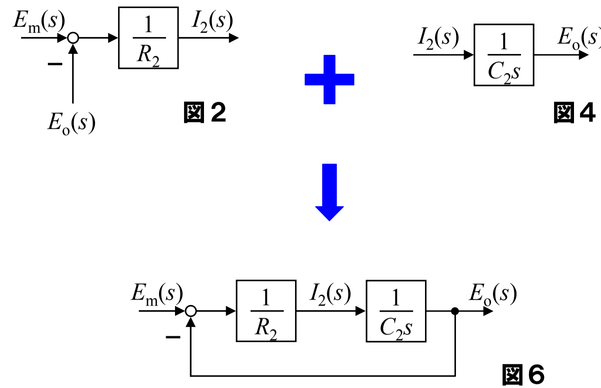
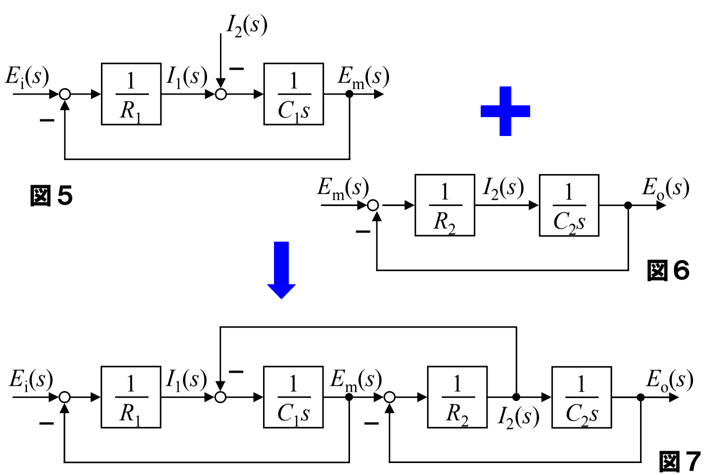
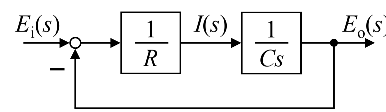


図４

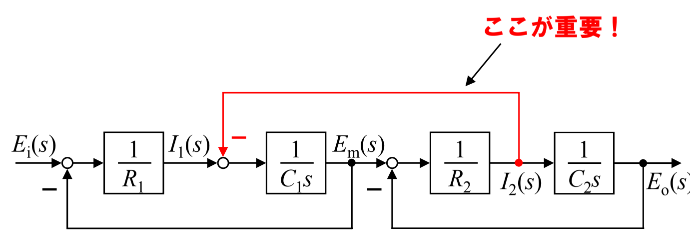






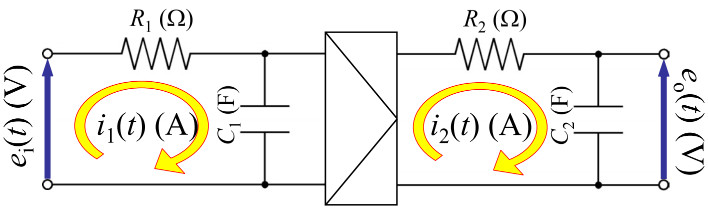


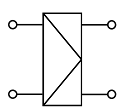
ＲＣ回路のブロック線図



２つのＲＣ回路を直列接続した時のブロック線図

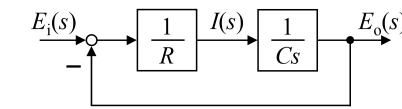
解決策（バッファを入れる）



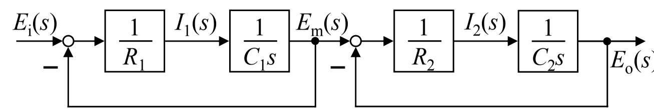


バッファ

- 入力電圧と出力電圧は同じ
- 入力インピーダンス大
（電流は流れ込まない）
- 出力インピーダンス小
（必要なだけ電流が流れ出す）



ＲＣ回路のブロック線図



２つのＲＣ回路をバッファを介して
直列接続した時のブロック線図

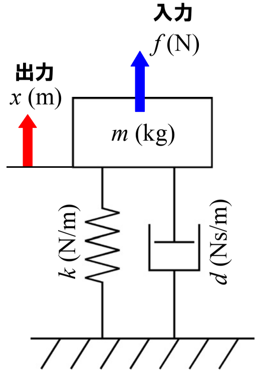
補足

- 他の電気回路でも同じ
- オペアンプを使えば問題ない

本日の授業内容

1．ＲＣ回路の結合
2．バネーマスーダンパ系の結合
3．タンクシステムの結合

バネーマスーダンパ系



図のバネーマスーダンパ系の運動方程式

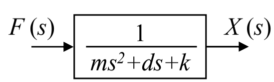
$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}+d\frac{dx(t)}{dt}+kx(t)=f(t) \quad (1)$$

ラプラス変換

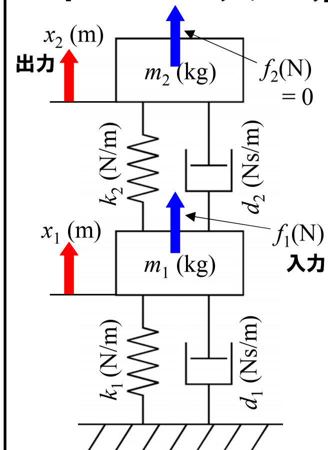
$$ms^2X(s)+dsX(s)+kX(s)=F(s)$$

$$(ms^2+ds+k)X(s)=F(s)$$

$$G(s)=\frac{X(s)}{F(s)}=\frac{1}{ms^2+ds+k} \quad (2)$$



バネーマスーダンパ系の結合



図のバネーマスーダンパ系の運動方程式

$$m_1\frac{d^2x_1(t)}{dt^2}=-k_1x_1(t)-d_1\frac{dx_1(t)}{dt} -k_2(x_1(t)-x_2(t)) -d_2\left(\frac{dx_1(t)}{dt}-\frac{dx_2(t)}{dt}\right) +f_1(t) \quad (1)$$

$$m_2\frac{d^2x_2(t)}{dt^2}=-k_2(x_2(t)-x_1(t)) -d_2\left(\frac{dx_2(t)}{dt}-\frac{dx_1(t)}{dt}\right) \quad (2)$$

式（１）をラプラス変換し、整理すると、

$$m_1s^2X_1(s)=-k_1X_1(s)-d_1sX_1(s)+k_2\{X_2(s)-X_1(s)\} +d_2s\{X_2(s)-X_1(s)\}+F_1(s)$$

$$\{m_1s^2+(d_1+d_2)s+(k_1+k_2)\}X_1(s)-(d_2s+k_2)X_2(s)=F_1(s) \quad (3)$$

式（２）をラプラス変換し、整理すると、

$$m_2s^2X_2(s)=-k_2(X_2(s)-X_1(s))-d_2s(X_2(s)-X_1(s))$$

$$(m_2s^2+d_2s+k_2)X_2(s)=(d_2s+k_2)X_1(s)$$

$$X_1(s)=\frac{m_2s^2+d_2s+k_2}{d_2s+k_2}X_2(s) \quad (4)$$

式（４）を式（３）に代入し、整理すると、

$$\{m_1s^2+(d_1+d_2)s+(k_1+k_2)\}\frac{m_2s^2+d_2s+k_2}{d_2s+k_2}X_2(s) -(d_2s+k_2)X_2(s)=F_1(s)$$

$$\frac{D(s)}{N(s)}X_2(s)=F_1(s) \quad (5)$$

ただし、

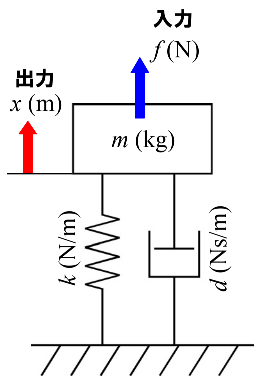
$$N(s)=d_2s+k_2$$

$$D(s)=m_1m_2s^4 +(m_1d_2+m_2d_1+m_2d_2)s^3 +(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+d_1d_2)s^2 +(d_1k_2+d_2k_1)s+k_1k_2$$

よって、伝達関数は次式となる。

$$G(s)=\frac{X_2(s)}{F_1(s)}=\frac{N(s)}{D(s)} \quad (6)$$

ブロック線図を使って原因を探る

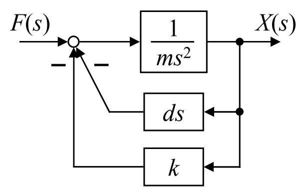


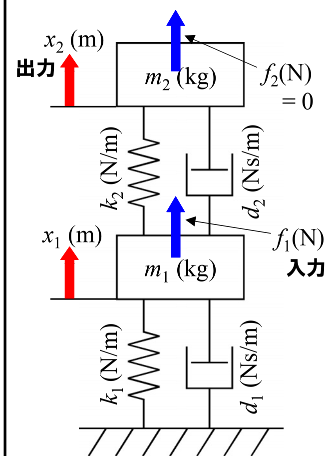
バネーマスーダンパ系の運動方程式

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}+d\frac{dx(t)}{dt}+kx(t)=f(t)$$

$$ms^2X(s)+dsX(s)+kX(s)=F(s)$$

$$\therefore X(s)=\frac{1}{ms^2}\{F(s)-dsX(s)-kX(s)\}$$





バネーマスーダンパ系の運動方程式

$$m_1\frac{d^2x_1(t)}{dt^2}=-k_1x_1(t)-d_1\frac{dx_1(t)}{dt}-k_2(x_1(t)-x_2(t))-d_2\left(\frac{dx_1(t)}{dt}-\frac{dx_2(t)}{dt}\right)+f_1(t) \quad (1)$$

$$m_2\frac{d^2x_2(t)}{dt^2}=-k_2(x_2(t)-x_1(t))-d_2\left(\frac{dx_2(t)}{dt}-\frac{dx_1(t)}{dt}\right) \quad (2)$$

$$\boxed{x_{21}(t)=x_2(t)-x_1(t)} \quad (3)$$

式（３）から、

$$X_{21}(t)=X_2(t)-X_1(t) \quad (4)$$

式（１）をラプラス変換すると、

$$\begin{aligned}m_1s^2X_1(s)&=-k_1X_1(s)-d_1sX_1(s)\\&\quad+k_2\{X_2(s)-X_1(s)\}+d_2s\{X_2(s)-X_1(s)\}+F_1(s)\\&=-k_1X_1(s)-d_1sX_1(s)+k_2X_{21}(s)+d_2sX_{21}(s)+F_1(s)\end{aligned}$$

$$X_1(s)=\frac{1}{m_1s^2}\{-k_1X_1(s)-d_1sX_1(s)+k_2X_{21}(s)+d_2sX_{21}(s)+F_1(s)\} \quad (5)$$

式（２）をラプラス変換すると、

$$\begin{aligned}m_2s^2X_2(s)&=-k_2\{X_2(s)-X_1(s)\}-d_2s\{X_2(s)-X_1(s)\}\\&=-k_2X_{21}(s)-d_2sX_{21}(s)\end{aligned}$$

$$X_2(s)=\frac{1}{m_2s^2}\{-k_2X_{21}(s)-d_2sX_{21}(s)\} \quad (6)$$

$$X_1(s)=\frac{1}{m_1s^2}\{-k_1X_1(s)-d_1sX_1(s)+k_2X_{21}(s)+d_2sX_{21}(s)+F_1(s)\} \quad (5)$$

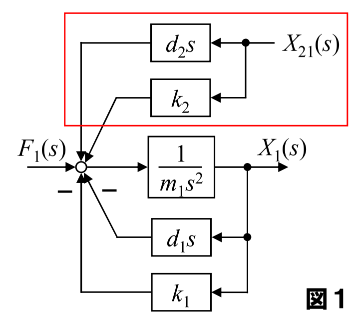


図１

$$X_{21}(s) = X_2(s) - X_1(s) \qquad （４）$$

$$X_2(s) = \frac{1}{m_2 s^2}\{-k_2 X_{21}(s) - d_2 s X_{21}(s)\} \qquad （６）$$

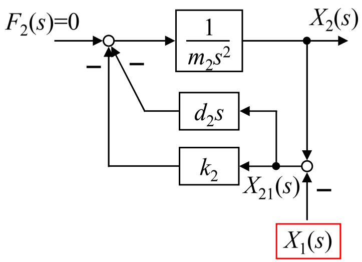


図２

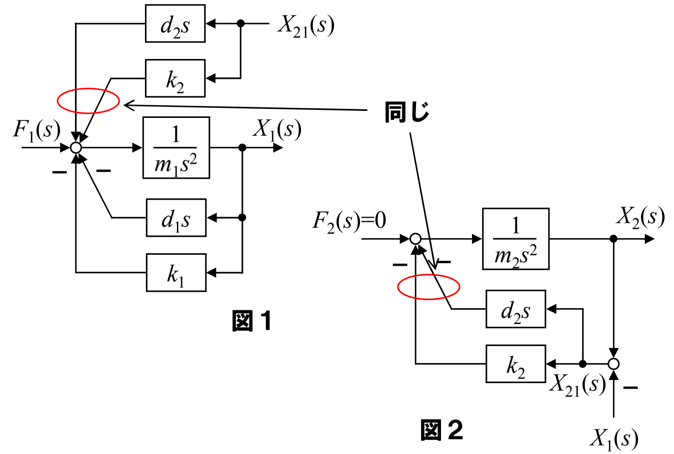


図１

図２

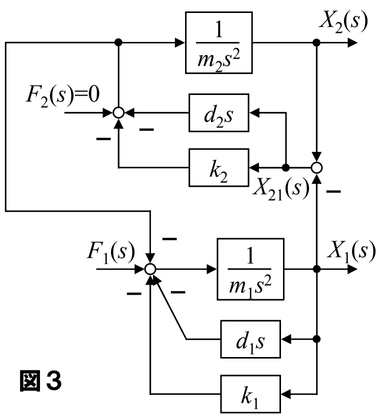
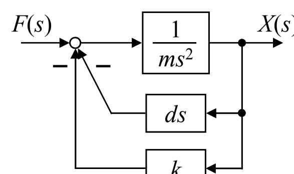
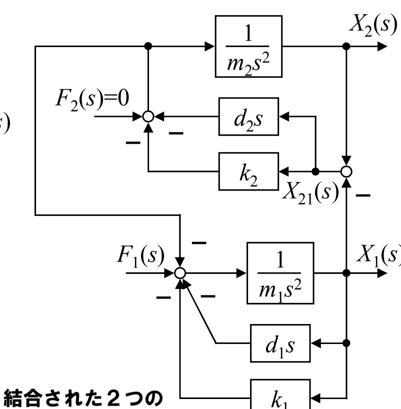


図３



バネーマスーダンパ系
のブロック線図



結合された２つの
バネーマスーダンパ系の
ブロック線図

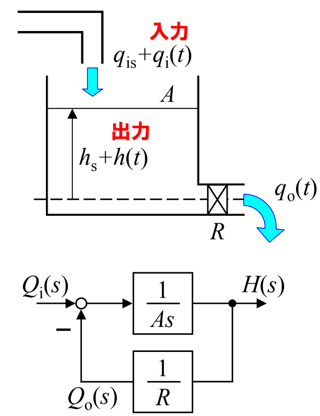
本日の授業内容

1．ＲＣ回路の結合

2．バネ－マス－ダンパ系の結合

3．タンクシステムの結合

タンクシステム



図のタンクシステムの
線形化されたダイナミクスを
表す微分方程式

$$A\frac{dh(t)}{dt}=q_i(t)-\frac{1}{R}h(t) \quad （１）$$

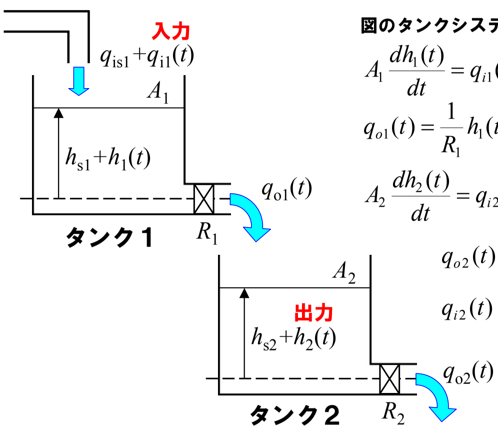
$$q_o(t)=\frac{1}{R}h(t) \quad （２）$$

$$AsH(s)=Q_i(s)-Q_o(s)$$

$$\therefore H(s)=\frac{1}{As}\{Q_i(s)-Q_o(s)\} \quad （３）$$

$$Q_o(s)=\frac{1}{R}H(s) \quad （４）$$

タンクシステムの結合（１）



図のタンクシステムの微分方程式

$$A_1\frac{dh_1(t)}{dt}=q_{i1}(t)-\frac{1}{R_1}h_1(t) \quad （１）$$

$$q_{o1}(t)=\frac{1}{R_1}h_1(t) \quad （２）$$

$$A_2\frac{dh_2(t)}{dt}=q_{i2}(t)-\frac{1}{R_2}h_2(t) \quad （３）$$

$$q_{o2}(t)=\frac{1}{R_2}h_2(t) \quad （４）$$

$$q_{i2}(t)=q_{o1}(t) \quad （５）$$

式（１）と式（２）をラプラス変換すると、

$$A_1sH_1(s)=Q_{i1}(s)-Q_{o1}(s)$$

$$\therefore H_1(s)=\frac{1}{A_1s}\{Q_{i1}(s)-Q_{o1}(s)\} \quad （６）$$

$$Q_{o1}(s)=\frac{1}{R_1}H_1(s) \quad （７）$$

式（３）～式（５）をラプラス変換すると、

$$A_2sH_2(s)=Q_{o1}(t)-Q_{o2}(t)$$

$$\therefore H_2(s)=\frac{1}{A_2s}\{Q_{o1}(t)-Q_{o2}(t)\} \quad （８）$$

$$Q_{o2}(s)=\frac{1}{R_2}H_2(s) \quad （９）$$

$$H_1(s) = \frac{1}{A_1 s}\{Q_{i1}(s) - Q_{o1}(s)\} \quad (６)$$

$$Q_{o1}(s) = \frac{1}{R_1}H_1(s) \quad (７)$$

$$H_2(s) = \frac{1}{A_2 s}\{Q_{o1}(t) - Q_{o2}(t)\} \quad (８)$$

$$Q_{o2}(s) = \frac{1}{R_2}H_2(s) \quad (９)$$

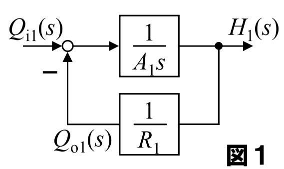


図１

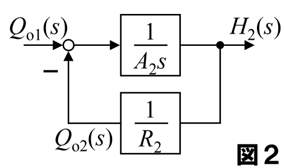


図２

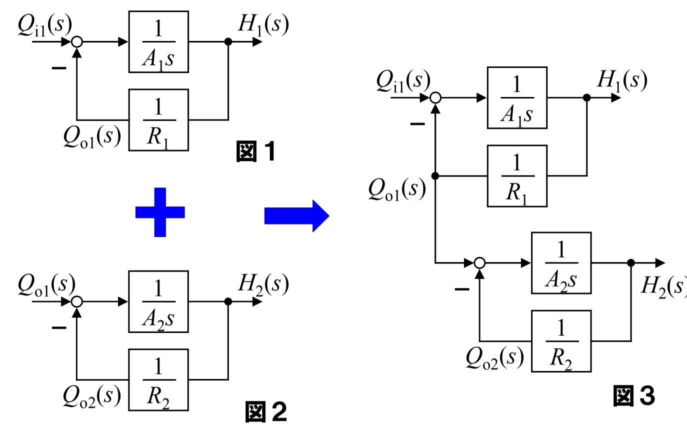
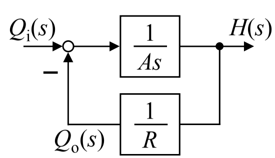
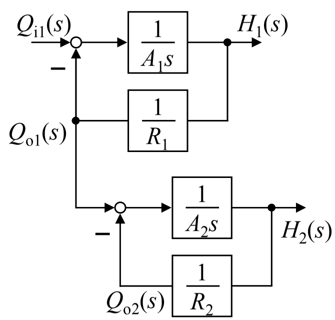


図３

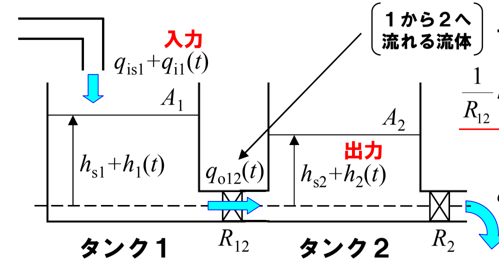


タンクシステム
のブロック線図



結合された２つの
タンクシステム（１）の
ブロック線図

タンクシステムの結合（２）



（１から２へ流れる流体）－（２から１へ流れる流体）

$$\frac{1}{R_{12}}h_1(t) - \frac{1}{R_{12}}h_2(t)$$

図のタンクシステムの微分方程式

$$A_1\frac{dh_1(t)}{dt} = q_{i1}(t) - q_{o12}(t) \quad (１)$$

$$q_{o12}(t) = \frac{1}{R_{12}}\{h_1(t) - h_2(t)\} \quad (３)$$

$$A_2\frac{dh_2(t)}{dt} = q_{o12}(t) - q_{o2}(t) \quad (２)$$

$$q_{o2}(t) = \frac{1}{R_2}h_2(t) \quad (４)$$

式（１）～式（４）をラプラス変換すると、

$$A_1 s H_1(s) = Q_{i1}(s) - Q_{o12}(s)$$

$$\therefore H_1(s) = \frac{1}{A_1 s}\{Q_{i1}(s) - Q_{o12}(s)\} \quad （５）$$

$$Q_{o12}(s) = \frac{1}{R_{12}}\{H_1(s) - H_2(s)\} \quad （７）$$

$$A_2 s H_2(s) = Q_{o12}(s) - Q_{o2}(s)$$

$$\therefore H_2(s) = \frac{1}{A_2 s}\{Q_{o12}(s) - Q_{o2}(s)\} \quad （６）$$

$$Q_{o2}(s) = \frac{1}{R_2} H_2(s) \quad （８）$$

$$H_1(s) = \frac{1}{A_1 s}\{Q_{i1}(s) - Q_{o12}(s)\} \quad （５）$$

$$Q_{o12}(s) = \frac{1}{R_{12}}\{H_1(s) - H_2(s)\} \quad （７）$$

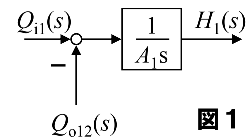


図１

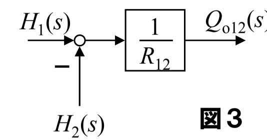


図３

$$H_2(s) = \frac{1}{A_2 s}\{Q_{o12}(s) - Q_{o2}(s)\} \quad （６）$$

$$Q_{o2}(s) = \frac{1}{R_2} H_2(s) \quad （８）$$

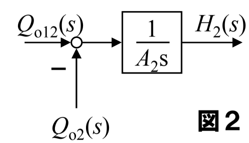


図２

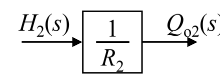


図４

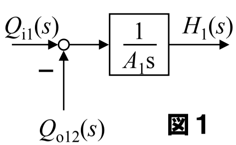


図１

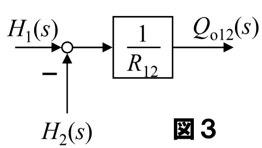


図３

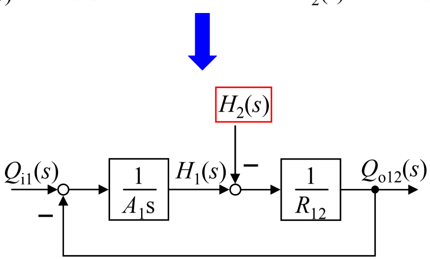


図５

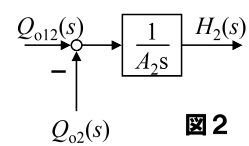


図２

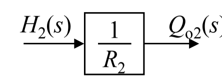


図４

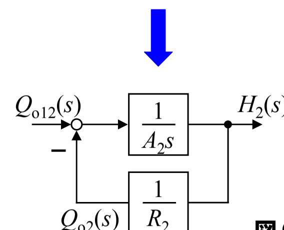


図６

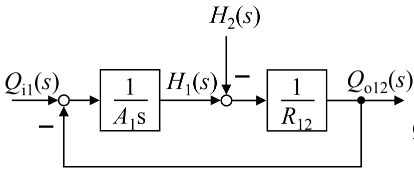


図５

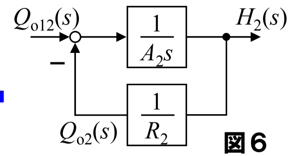


図６

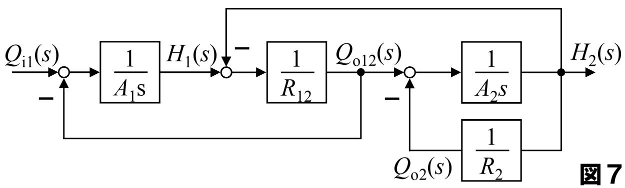
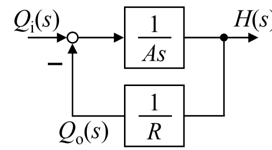
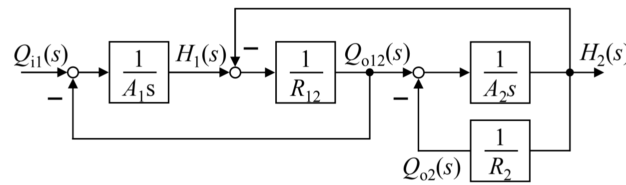


図７



タンクシステム
のブロック線図



結合された２つのタンクシステム（２）のブロック線図