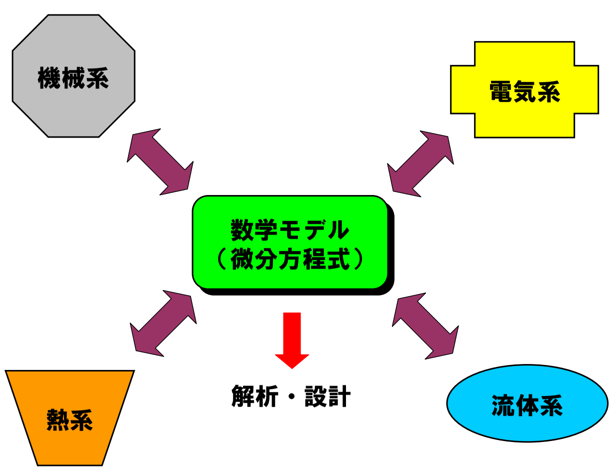
システムダイナミックス

第９回　いろいろなシステムとその応答

本日の授業内容

1．１次遅れ系と２次遅れ系

2．ステップ応答とインパルス応答



１次遅れ系： $$G(s)=\frac{K}{Ts+1}$$

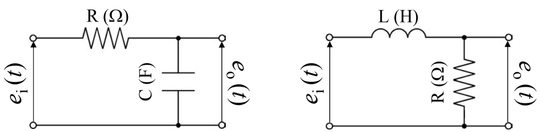
２次遅れ系： $$G(s)=\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\varsigma\omega_n s+\omega_n^2}$$

1次遅れ系

$$G(s)=\frac{K}{Ts+1}$$

T：時定数
K：ゲイン定数

例えば、



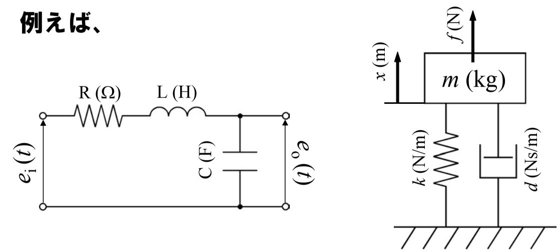
ＲＣ回路　　ＲＬ回路

２次遅れ系

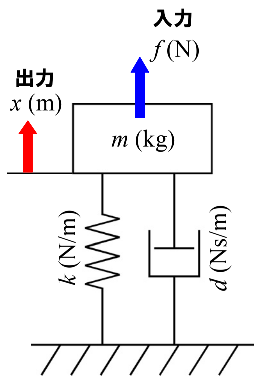
$$G(s)=\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\varsigma\omega_n s+\omega_n^2}$$

K：ゲイン定数
ζ：減衰比
ω：固有角周波数

例えば、



バネーマスーダンパ系の伝達関数（１）

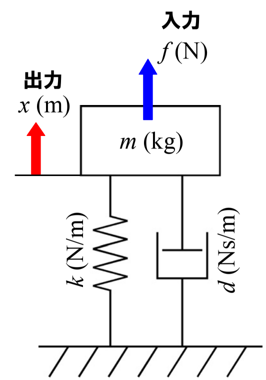


図のバネーマスーダンパ系の
ダイナミクスを表す微分方程式

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}+d\frac{dx(t)}{dt}+kx(t)=f(t)$$

$$ms^2X(s)+dsX(s)+kX(s)=F(s)$$
$$\left(ms^2+ds+k\right)X(s)=F(s)$$
$$G(s)=\frac{X(s)}{F(s)}=\frac{1}{ms^2+ds+k}$$

バネーマスーダンパ系の伝達関数（１）

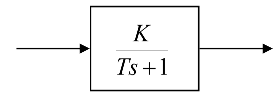


$$G(s)=\frac{1}{ms^2+ds+k}=\frac{\frac{1}{m}}{s^2+\frac{d}{m}s+\frac{k}{m}}=\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

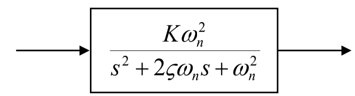
$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}$$
$$\zeta=\frac{d}{2\sqrt{mk}}$$
$$K=\frac{1}{k}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$ ：固有角周波数 (rad/s)

$$\varsigma = \frac{d}{2\sqrt{mk}}$$ ：減衰比 (無次元量)



１次遅れ系



２次遅れ系

本日の授業内容

1．１次遅れ系と２次遅れ系

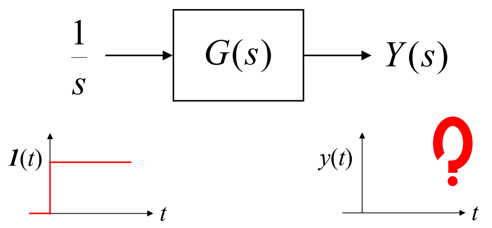
2．ステップ応答とインパルス応答

システムの特性を表す重要な応答

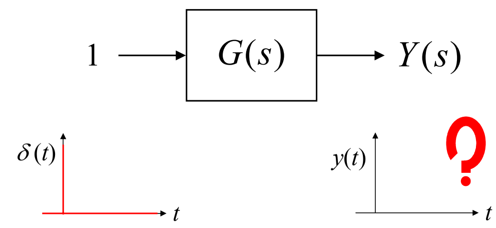
システムの特性を調べるために、基本的な入力を与えて、その出力（応答）を調べることがよくある。

基本的な入力	応答
単位ステップ入力	インディシャル応答 ステップ応答
単位インパルス入力	インパルス応答
正弦波入力	周波数応答

インディシャル応答、（単位）ステップ応答



（単位）インパルス応答



本日の授業内容

１．１次遅れ系と２次遅れ系

２．ステップ応答とインパルス応答

２－１　１次遅れ系のステップ応答
２－２　１次遅れ系のインパルス応答
２－３　２次遅れ系のステップ応答
２－４　２次遅れ系のインパルス応答

１次遅れ系のステップ応答

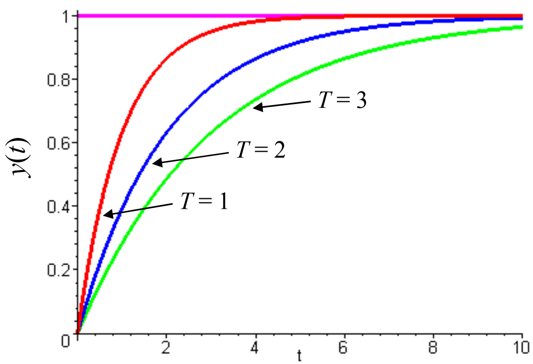
$$\frac{1}{s} \longrightarrow \boxed{\frac{K}{Ts+1}} \longrightarrow ?$$

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{K}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s} \\ &= \frac{K}{s(Ts+1)} \\ &= K\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1/T}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{y(t) = K\left(1 - \exp(-t/T)\right)}$$

$y(t) = K(1 - \exp(-t/T)) \qquad K = 1$



時定数

$y(t) = K(1 - \exp(-t/T))$

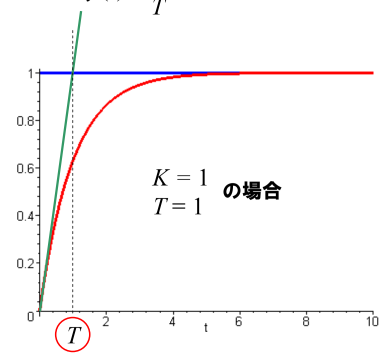
$\lim_{t \to \infty} y(t) = K$

$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{K}{T}\exp(-t/T)$

$\frac{dy(0)}{dt} = \frac{K}{T}$

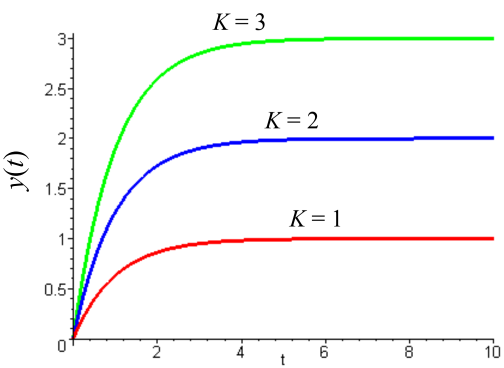
$y(t) = \frac{K}{T}t$

$K = \frac{K}{T}t \qquad \therefore t = T$

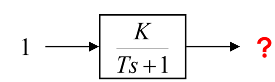


時定数は応答の速さを表す！

$y(t) = K(1 - \exp(-t/T)) \qquad T = 1$



１次遅れ系のインパルス応答

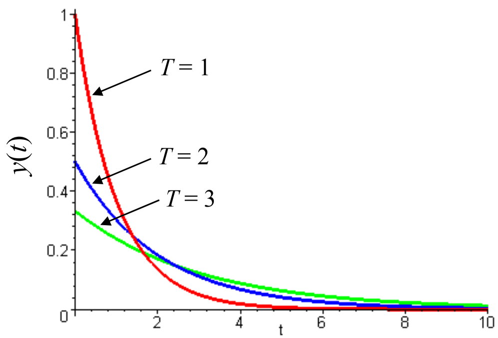


$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

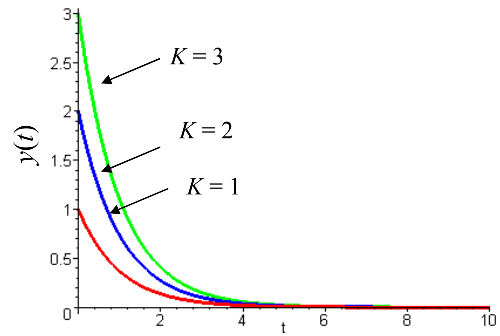
$$Y(s) = \frac{K}{Ts+1} \cdot 1 = \frac{K}{Ts+1} = \frac{K}{T} \cdot \frac{1}{s + 1/T}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{K}{T}\exp(-t/T)}$$

$y(t) = \frac{K}{T}\exp(-t/T) \qquad K = 1$



$y(t) = \frac{K}{T}\exp(-t/T) \qquad T = 1$



本日の授業内容

１．１次遅れ系と２次遅れ系

２．ステップ応答とインパルス応答

- ２－１　１次遅れ系のステップ応答
- ２－２　１次遅れ系のインパルス応答
- ２－３　２次遅れ系のステップ応答
- ２－４　２次遅れ系のインパルス応答

２次遅れ系のステップ応答

$$\frac{1}{s} \longrightarrow \boxed{\frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\varsigma\omega_n s + \omega_n^2}} \longrightarrow ?$$

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

$$Y(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\varsigma\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s}$$

$$= \frac{K\omega_n^2}{s\left(s^2 + 2\varsigma\omega_n s + \omega_n^2\right)}$$

$$s^2 + 2\varsigma\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$ の根？

$$s = -\varsigma\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\cdot\omega_n$$

$\varsigma > 1$ ： $s = -\varsigma\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\cdot\omega_n$ （異なる実数解）

$\varsigma = 1$ ： $s = -\varsigma\omega_n$ （重解）

$0 < \varsigma < 1$ ： $s = -\varsigma\omega_n \pm j\sqrt{1-\zeta^2}\cdot\omega_n$ （共役複素解）

$\varsigma > 1$ のとき $s = -\varsigma\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\cdot\omega_n$ （異なる実数解）

$$\frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\varsigma\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{K\omega_n^2}{(s-\alpha)(s-\beta)}$$

$$\alpha = -\varsigma\omega_n + \sqrt{\zeta^2 - 1}\cdot\omega_n$$
$$\beta = -\varsigma\omega_n - \sqrt{\zeta^2 - 1}\cdot\omega_n$$

$$\frac{1}{s} \longrightarrow \boxed{\frac{K\omega_n^2}{(s-\alpha)(s-\beta)}} \longrightarrow ?$$

$$Y(s) = \frac{K\omega_n^2}{(s-\alpha)(s-\beta)}\cdot\frac{1}{s} = \frac{K\omega_n^2}{s(s-\alpha)(s-\beta)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-\alpha} + \frac{C}{s-\beta}$$

$$\boxed{y(t) = A + B\exp(\alpha t) + C\exp(\beta t)}$$

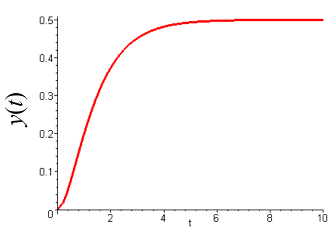
例題：

$$\frac{1}{s} \longrightarrow \boxed{\frac{1}{(s+1)(s+2)}} \longrightarrow ?$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}\cdot\frac{1}{s} = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

$$\boxed{}$$

$$y(t) = \boxed{}$$



$\varsigma = 1$ のとき $s = -\varsigma\omega_n$ （重解）

$$\frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\varsigma\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{K\omega_n^2}{(s+\varsigma\omega_n)^2}$$

$$\frac{1}{s} \longrightarrow \boxed{\frac{K\omega_n^2}{(s+\zeta\omega_n)^2}} \longrightarrow ?$$

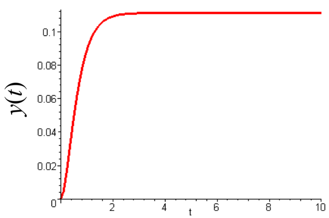
$$Y(s) = \frac{K\omega_n^2}{(s+\zeta\omega_n)^2}\cdot\frac{1}{s} = \frac{K\omega_n^2}{s(s+\zeta\omega_n)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+\zeta\omega_n} + \frac{C}{(s+\zeta\omega_n)^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) = A + B\exp(-\zeta\omega_n t) \\ + Ct\exp(-\zeta\omega_n t) \end{aligned}}$$

例題：

$$\frac{1}{s} \longrightarrow \boxed{\frac{1}{(s+3)^2}} \longrightarrow \ ?$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+3)^2}\cdot\frac{1}{s}$$
$$= \frac{1}{s(s+3)^2}$$
$$= \frac{1/9}{s} - \frac{1/9}{s+3} - \frac{1/3}{(s+3)^2}$$



$$y(t) = \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\exp(-3t) - \frac{1}{3}t\cdot\exp(-3t)$$

$0<\varsigma<1$ **のとき**　$s=-\varsigma\omega_n \pm j\sqrt{1-\zeta^2}\cdot\omega_n$　**（共役複素解）**

$$\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\varsigma\omega_n s+\omega_n^2} = \frac{K\omega_n^2}{(s-\alpha-j\beta)(s-\alpha+j\beta)}$$

$$s=-\varsigma\omega_n \pm j\sqrt{1-\zeta^2}\cdot\omega_n$$
$$=\alpha \pm j\beta$$
$$\alpha = -\varsigma\omega_n$$
$$\beta = \sqrt{1-\zeta^2}\cdot\omega_n$$

$$\frac{1}{s} \longrightarrow \boxed{\frac{K\omega_n^2}{(s-\alpha-j\beta)(s-\alpha+j\beta)}} \longrightarrow \ ?$$

$$Y(s) = \frac{K\omega_n^2}{(s-\alpha-j\beta)(s-\alpha+j\beta)}\cdot\frac{1}{s}$$
$$= \frac{K\omega_n^2}{s(s-\alpha-j\beta)(s-\alpha+j\beta)}$$
$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s-\alpha-j\beta} + \frac{C}{s-\alpha+j\beta}$$

$$Y(s) = \frac{K\omega_n^2}{s(s-\alpha-j\beta)(s-\alpha+j\beta)}$$
$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s-\alpha-j\beta} + \frac{C}{s-\alpha+j\beta}$$

$$A = \left.\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\right|_{s=0} = K$$

$$B = \left.\frac{K\omega_n^2}{s(s-\alpha+j\beta)}\right|_{s=\alpha+j\beta} = \frac{K\omega_n^2}{(\alpha+j\beta)\cdot(2j\beta)}$$

$$C = \left.\frac{K\omega_n^2}{s(s-\alpha-j\beta)}\right|_{s=\alpha-j\beta} = \frac{K\omega_n^2}{(\alpha-j\beta)\cdot(-2j\beta)}$$

$$Y(s) = K\left(\frac{1}{s} + \frac{\omega_n^2/2j\beta(\alpha+j\beta)}{s-\alpha-j\beta} - \frac{\omega_n^2/2j\beta(\alpha-j\beta)}{s-\alpha+j\beta}\right)$$

$$y(t) = K\left(1 + \frac{\omega_n^2}{2j\beta(\alpha+j\beta)}\exp((\alpha+j\beta)t) - \frac{\omega_n^2}{2j\beta(\alpha-j\beta)}\exp((\alpha-j\beta)t)\right)$$

$$y(t) = K\left(1 + \frac{\omega_n^2}{2j\beta(\alpha+j\beta)}\exp(\alpha t)\exp(j\beta t) - \frac{\omega_n^2}{2j\beta(\alpha-j\beta)}\exp(\alpha t)\exp(-j\beta t)\right)$$

$$y(t)=K\left(1+\frac{\omega_n^2}{2j\beta(\alpha+j\beta)}\exp(\alpha t)(\cos(\beta t)+j\sin(\beta t))\right.$$
$$\left.-\frac{\omega_n^2}{2j\beta(\alpha-j\beta)}\exp(\alpha t)(\cos(\beta t)-j\sin(\beta t))\right)$$

$$\boxed{y(t)=K\left(1-\frac{\omega_n^2}{\alpha^2+\beta^2}\exp(\alpha t)\cos(\beta t)+\frac{\alpha\omega_n^2}{\beta(\alpha^2+\beta^2)}\exp(\alpha t)\sin(\beta t)\right)}$$

例題：

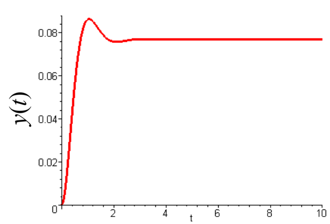
$$\frac{1}{s}\longrightarrow\boxed{\frac{1}{s^2+4s+13}}\longrightarrow ?$$

$$Y(s)=\frac{1}{s^2+4s+13}\cdot\frac{1}{s}$$
$$=\frac{1}{s(s^2+4s+13)}$$
$$=\frac{1}{s(s+2-j3)(s+2+j3)}$$
$$=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+2-j3}+\frac{C}{s+2+j3}$$

$$A=\frac{1}{13}$$
$$B=\frac{-3+j2}{78}$$
$$C=\frac{-3-j2}{78}$$

$$Y(s)=\frac{1}{13}\left(\frac{1}{s}+\frac{(-3+j2)/6}{s+2-j3}+\frac{(-3-j2)/6}{s+2+j3}\right)$$

$$y(t)=\frac{1}{13}\left(1+\frac{-3+j2}{6}\exp((-2+j3)t)+\frac{-3-j2}{6}\exp((-2-j3)t)\right)$$
$$=\frac{1}{13}\left(1-\exp(-2t)\cos(3t)-\frac{2}{3}\exp(-2t)\sin(3t)\right)$$



２次遅れ系のインパルス応答

$$1\longrightarrow\boxed{\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\varsigma\omega_n s+\omega_n^2}}\longrightarrow ?$$

$$Y(s)=G(s)\cdot U(s)$$
$$Y(s)=\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\varsigma\omega_n s+\omega_n^2}\cdot 1$$
$$=\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\varsigma\omega_n s+\omega_n^2}$$

$\varsigma > 1$ のとき　$s = -\varsigma\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\cdot\omega_n$　（異なる実数解）

$$\frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\varsigma\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{K\omega_n^2}{(s-\alpha)(s-\beta)} \qquad \begin{aligned}\alpha &= -\varsigma\omega_n + \sqrt{\zeta^2 - 1}\cdot\omega_n \\ \beta &= -\varsigma\omega_n - \sqrt{\zeta^2 - 1}\cdot\omega_n\end{aligned}$$

$$1 \longrightarrow \boxed{\frac{K\omega_n^2}{(s-\alpha)(s-\beta)}} \longrightarrow ?$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{K\omega_n^2}{(s-\alpha)(s-\beta)}\cdot 1 \\ &= \frac{K\omega_n^2}{(s-\alpha)(s-\beta)} \\ &= \frac{A}{s-\alpha} + \frac{B}{s-\beta} \end{aligned}$$

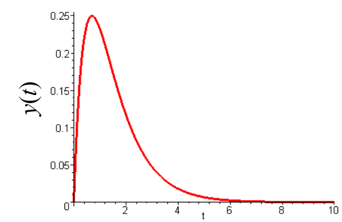
$$\boxed{y(t) = A\exp(\alpha t) + B\exp(\beta t)}$$

例題：

$$1 \longrightarrow \boxed{\frac{1}{(s+1)(s+2)}} \longrightarrow ?$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(s+1)(s+2)}\cdot 1 \\ &= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \end{aligned}$$

$$y(t) = \exp(-t) - \exp(-2t)$$



$\varsigma = 1$ のとき　$s = -\varsigma\omega_n$　（重解）

$$\frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\varsigma\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{K\omega_n^2}{(s+\varsigma\omega_n)^2}$$

$$1 \longrightarrow \boxed{\frac{K\omega_n^2}{(s+\zeta\omega_n)^2}} \longrightarrow ?$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{K\omega_n^2}{(s+\zeta\omega_n)^2}\cdot 1 \\ &= \frac{K\omega_n^2}{(s+\zeta\omega_n)^2} \\ &= \frac{A}{s+\zeta\omega_n} + \frac{B}{(s+\zeta\omega_n)^2} \end{aligned}$$

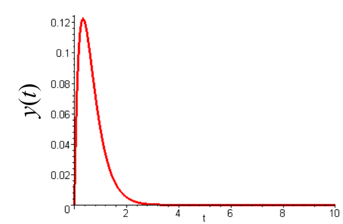
$$\boxed{y(t) = A\exp(-\zeta\omega_n t) + Bt\exp(-\zeta\omega_n t)}$$

例題：

$$1 \longrightarrow \boxed{\frac{1}{(s+3)^2}} \longrightarrow ?$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(s+3)^2}\cdot 1 \\ &= \frac{1}{(s+3)^2} \end{aligned}$$

$$y(t) = t\cdot\exp(-3t)$$



$0<\varsigma<1$ のとき　$s=-\varsigma\omega_n \pm j\sqrt{1-\zeta^2}\cdot\omega_n$　（共役複素解）

$$\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\varsigma\omega_n s+\omega_n^2}=\frac{K\omega_n^2}{(s-\alpha-j\beta)(s-\alpha+j\beta)}$$

$$s=-\varsigma\omega_n \pm j\sqrt{1-\zeta^2}\cdot\omega_n$$
$$=\alpha \pm j\beta$$
$$\alpha=-\varsigma\omega_n$$
$$\beta=\sqrt{1-\zeta^2}\cdot\omega_n$$

$$1 \longrightarrow \boxed{\frac{K\omega_n^2}{(s-\alpha-j\beta)(s-\alpha+j\beta)}} \longrightarrow ?$$

$$Y(s)=\frac{K\omega_n^2}{(s-\alpha-j\beta)(s-\alpha+j\beta)}\cdot 1$$
$$=\frac{K\omega_n^2}{(s-\alpha-j\beta)(s-\alpha+j\beta)}$$
$$=\frac{A}{s-\alpha-j\beta}+\frac{B}{s-\alpha+j\beta}$$

$$Y(s)=\frac{K\omega_n^2}{(s-\alpha-j\beta)(s-\alpha+j\beta)}$$
$$=\frac{A}{s-\alpha-j\beta}+\frac{B}{s-\alpha+j\beta}$$

$$A=\left.\frac{K\omega_n^2}{(s-\alpha+j\beta)}\right|_{s=\alpha+j\beta}=\frac{K\omega_n^2}{2j\beta}$$
$$B=\left.\frac{K\omega_n^2}{(s-\alpha-j\beta)}\right|_{s=\alpha-j\beta}=-\frac{K\omega_n^2}{2j\beta}$$

$$Y(s)=K\omega_n^2\left(\frac{1/2j\beta}{s-\alpha-j\beta}-\frac{1/2j\beta}{s-\alpha+j\beta}\right)$$

$$y(t)=\frac{K\omega_n^2}{2j\beta}\left(\exp((\alpha+j\beta)t)-\exp((\alpha-j\beta)t)\right)$$
$$=\frac{K\omega_n^2}{2j\beta}\exp(\alpha t)\left(\exp(j\beta t)-\exp(-j\beta t)\right)$$
$$=\frac{K\omega_n^2}{2j\beta}\exp(\alpha t)\cdot 2j\sin(\beta t)$$

$$\boxed{y(t)=\frac{K\omega_n^2}{\beta}\exp(\alpha t)\cdot\sin(\beta t)}$$

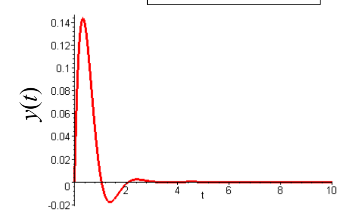
例題：

$$1 \longrightarrow \boxed{\frac{1}{s^2+4s+13}} \longrightarrow ?$$

$$Y(s)=\frac{1}{s^2+4s+13}\cdot 1$$
$$=\frac{1}{s^2+4s+13}$$

$y(t)=$

$=$



！！注意！！

$$U(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow Y(s)$$

$U(s)$：入力（信号）のラプラス変換

$Y(s)$：出力（信号）のラプラス変換

$G(s)$：伝達関数　$G(s) = Y(s) / U(s)$

どちらも s の関数だが、意味していることは全く異なる！

伝達関数：入力のラプラス変換と出力のラプラス変換の比

$U(s)$、$Y(s)$は信号を、$G(s)$はダイナミクスを表している。

例えば、$\dfrac{1}{Ts+1}$ は、

信号と見れば、指数関数　$\dfrac{1}{T}\exp(-\dfrac{t}{T})$

$$\because \frac{1}{Ts+1} = \frac{1}{T}\frac{1}{s+1/T}$$

ダイナミクスと見れば、１次遅れ系

$$G(s) = \frac{1}{Ts+1}$$

伝達関数（ダイナミクス）とインパルス応答（信号）の関係

$$1 \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow Y(s)$$

$$Y(s) = G(s) \cdot 1$$

伝達関数は、インパルス応答をラプラス変換したものと等しい。

つまり、インパルス応答を計測できれば、そのシステムの伝達関数を求めることができる。

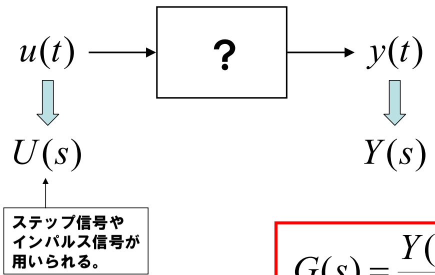
ステップ応答を微分すれば、インパルス応答になるので、ステップ応答からも伝達関数を求めることができる。

あるシステムの伝達関数を知りたいとき

１．物理法則を用いて求める。
（今まで勉強してきた方法）

２．入力信号と出力信号から求める。
（システム同定）

システム同定（本当はもっと難しい）



$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}}$$

練習問題：
以下の伝達関数を持つシステムの、
ステップ応答とインパルス応答を求めよ。

（１）　$G(s) = \dfrac{5}{s^2 + 12s + 35}$

（２）　$G(s) = \dfrac{3}{s^2 + 16s + 64}$

（３）　$G(s) = \dfrac{1}{s^2 + 6s + 25}$

解答：

（１）ステップ応答：　$y(t) = \dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{2}\exp(-5t) + \dfrac{5}{14}\exp(-7t)$

インパルス応答：　$y(t) = \dfrac{5}{2}(\exp(-5t) - \exp(-7t))$

（２）ステップ応答：　$y(t) = \dfrac{3}{64} - \dfrac{3}{64}\exp(-8t) - \dfrac{3}{8}t\exp(-8t)$

インパルス応答：　$y(t) = 3t\exp(-8t)$

（３）ステップ応答：

$$y(t) = \frac{1}{25} - \frac{1}{25}\exp(-3t)\cos(4t) - \frac{3}{100}\exp(-3t)\sin(4t)$$

インパルス応答：　$y(t) = \dfrac{1}{4}\exp(-3t)\sin(4t)$