システムダイナミックス

第８回　伝達関数

本日の授業内容

1．伝達関数

2．いろいろなシステムの伝達関数

3．応答の計算方法

伝達関数（１）

あるシステムのダイナミクスが、
次の微分方程式で表されているとする。

$$\frac{dy(t)}{dt} = ay(t) + bu(t)$$

$u(t)$：入力、$y(t)$：出力

この微分方程式をラプラス変換し、
出力について解くと次式となる。

$$sY(s) - y(0) = aY(s) + bU(s) \qquad Y(s) \equiv L(y(t))$$

$$(s-a)Y(s) = bU(s) + y(0) \qquad U(s) \equiv L(u(t))$$

$$\therefore Y(s) = \frac{b}{s-a}U(s) + \frac{1}{s-a}y(0)$$

伝達関数（２）

$$Y(s) = \boxed{\frac{b}{s-a}U(s)} + \boxed{\frac{1}{s-a}y(0)}$$

入力に
依存する応答
（零状態応答）

初期状態に
依存する応答
（零入力応答）

伝達関数では
こちらだけ考える

伝達関数（３）

すべての初期状態を０とするときの
入力と出力のラプラス変換の比を
伝達関数（Transfer Function）という。

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

$G(s)$：伝達関数
$U(s)$：入力のラプラス変換
$Y(s)$：出力のラプラス変換

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

伝達関数（４）

$$Y(s) = \underbrace{\boxed{\frac{b}{s-a}}}_{\text{伝達関数}} U(s) + \cancel{\frac{1}{s-a} y(0)}$$

伝達関数を
考えるときは
ここは無視する

つまり、微分方程式 $\frac{dy(t)}{dt} = ay(t) + bu(t)$

で表されるシステムの伝達関数は

$G(s) = \frac{b}{s-a}$ である。

予習：ブロック線図

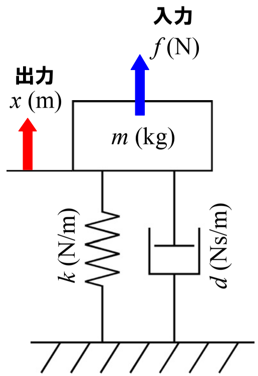
$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

$$U(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow Y(s)$$

本日の授業内容

1．伝達関数
2．いろいろなシステムの伝達関数
3．応答の計算方法

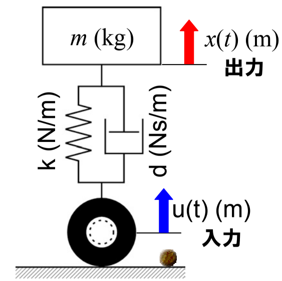
バネーマスーダンパ系の伝達関数（１）



図のバネーマスーダンパ系の
ダイナミクスを表す微分方程式

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}+d\frac{dx(t)}{dt}+kx(t)=f(t)$$

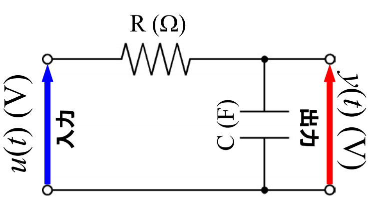
バネーマスーダンパ系の伝達関数（２）



図のバネーマスーダンパ系の
ダイナミクスを表す微分方程式

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}=-k(x(t)-u(t))$$
$$-d(\frac{dx(t)}{dt}-\frac{du(t)}{dt})$$

ＲＣ回路の伝達関数



図のＲＣ回路のダイナミクスを
表す微分方程式

$$\frac{dy(t)}{dt}=-\frac{1}{RC}y(t)+\frac{1}{RC}u(t)$$

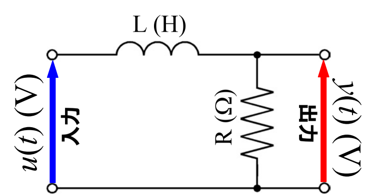
$$sY(s)-y(0)=-\frac{1}{RC}Y(s)+\frac{1}{RC}U(s)$$

$$\left(s+\frac{1}{RC}\right)Y(s)=\frac{1}{RC}U(s)$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1/RC}{s+1/RC}=\frac{1}{RCs+1}=\frac{1}{Ts+1}$$

ただし、
$T=RC$ である。

ＲＬ回路の伝達関数



図のＲＬ回路のダイナミクスを
表す微分方程式

$$\frac{dy(t)}{dt}=-\frac{R}{L}y(t)+\frac{R}{L}u(t)$$

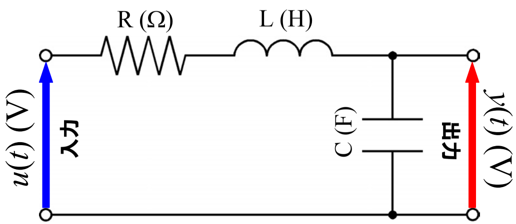
$$sY(s)-y(0)=-\frac{R}{L}Y(s)+\frac{R}{L}U(s)$$

$$\left(s+\frac{R}{L}\right)Y(s)=\frac{R}{L}U(s)$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{R/L}{s+R/L}=\frac{1}{(L/R)s+1}=\frac{1}{Ts+1}$$

ただし、
$T=L/R$ である。

ＲＬＣ回路の伝達関数



図のＲＬＣ回路のダイナミクスを
表す微分方程式

？？？

伝達関数

？？？

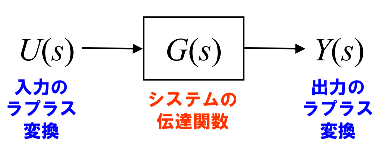
本日の授業内容

1．伝達関数

2．いろいろなシステムの伝達関数

3．応答の計算方法

応答（出力）の計算方法

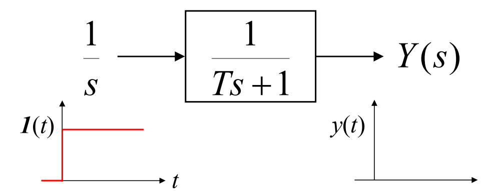


$$Y(s) = G(s)\ U(s)$$

$Y(s)$ をラプラス逆変換すると
応答が計算できる。

$$L^{-1}(Y(s)) \to y(t)$$

例えば、



$$Y(s) = \frac{1}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s(Ts+1)}$$

$$y(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{s(Ts+1)}\right)$$ これを計算すれば良い！

ラプラス逆変換の計算方法

$$f(t) = L^{-1}(F(s)) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)\exp(st)ds$$

この計算はやらない！

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0} \qquad (n \geq m)$$

を部分分数展開し、
各項毎にラプラス逆変換を行う。

（１）$A(s)=0$ の根 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ がすべて異なる場合

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{s - p_i}$$

ただし、 $C_i = (s - p_i)F(s)\big|_{s=p_i}$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s-\alpha}\right) = \exp(\alpha t)$$

$$f(t) = L^{-1}(F(s)) = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot \exp(p_i t)$$

例題： $Y(s) = \dfrac{1}{s(Ts+1)}$ **のラプラス逆変換を求めよ。**

$s(Ts+1)=0$ **の根は,** $s=0$ **と** $s=-1/T$ **である。**

よって、 $Y(s) = \dfrac{1}{s(Ts+1)} = \dfrac{C_1}{s} + \dfrac{C_2}{s+1/T}$ **と部分分数展開する。**

C_1 **と** C_2 **は、以下の通り計算される。**

$$C_1 = sY(s)\big|_{s=0} = \frac{1}{Ts+1}\bigg|_{s=0} = 1 \qquad C_2 = (s+1/T)Y(s)\big|_{s=-1/T} = \frac{1}{Ts}\bigg|_{s=-1/T} = -1$$

したがって、 $Y(s) = \dfrac{1}{s(Ts+1)} = \dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s+1/T}$

これをラプラス逆変換すると、次式が得られる。

$$y(t) = L^{-1}(Y(s)) = L^{-1}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1/T}\right) = 1 - \exp(-t/T)$$

（２）$A(s)=0$ の $(n\text{ - }r)$ 個の根 $p_1, p_2, \ldots, p_{n\text{-}r}$ がすべて異なり、p_j が r 重根である場合

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0}$$
$$= \sum_{i=1}^{n-r} \frac{C_i}{s - p_i} + \sum_{i=1}^{r} \frac{C_{ji}}{(s - p_j)^i}$$

$$L(\exp(-\alpha t)\cdot f(t))$$
$$= F(s+\alpha)$$

$$L(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

ただし、 $C_i = (s - p_i)F(s)\big|_{s=p_i}$

$$C_{ji} = \frac{1}{(r-i)!}\frac{d^{r-i}}{ds^{r-i}}(s-p_j)^r F(s)\bigg|_{s=p_j}$$

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n-r} C_i \cdot \exp(p_i t) + \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{(i-1)!} C_{ji} \cdot t^{i-1}\exp(p_j t)$$

例題：$Y(s)=\dfrac{1}{(s+1)^3(s+2)}$ **のラプラス逆変換を求めよ。**

$$Y(s)=\frac{1}{(s+1)^3(s+2)}=\frac{C_1}{s+2}+\frac{C_{21}}{s+1}+\frac{C_{22}}{(s+1)^2}+\frac{C_{23}}{(s+1)^3}$$

$$C_1=(s+2)Y(s)\Big|_{s=-2}=\left.\frac{1}{(s+1)^3}\right|_{s=-2}=-1$$

$$C_{21}=\frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}(s+1)^3Y(s)\Big|_{s=-1}=\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\left.\frac{1}{s+2}\right|_{s=-1}=\frac{1}{2}\left.\frac{2}{(s+2)^3}\right|_{s=-1}=1$$

$$C_{22}=\frac{d}{ds}(s+1)^3Y(s)\Big|_{s=-1}=\frac{d}{ds}\left.\frac{1}{s+2}\right|_{s=-1}=-\left.\frac{1}{(s+2)^2}\right|_{s=-1}=-1$$

$$C_{22}=(s+1)^3Y(s)\Big|_{s=-1}=\left.\frac{1}{s+2}\right|_{s=-1}=1$$

$$Y(s)=\frac{1}{(s+1)^3(s+2)}=-\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+1}-\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{(s+1)^3}$$

$$y(t)=-\exp(-2t)+\exp(-t)-t\exp(-t)+\frac{1}{2}t^2\exp(-t)$$