# システムダイナミックス

## 第７回　ラプラス変換の復習

## 本日の授業内容

1．ラプラス変換を使うと何が良いのか？

2．ラプラス変換の定義

3．重要な関数のラプラス変換

4．ラプラス変換の性質

5．ラプラス変換を使った微分方程式の解法



### ラプラス変換を使うと何が良いのか？

- 線形の常微分方程式を代数の計算で解くことが可能。
- 線形システムの入出力関係を簡潔に表現できる。



## 本日の授業内容

1．ラプラス変換を使うと何が良いのか？

**2．ラプラス変換の定義**

3．重要な関数のラプラス変換

4．ラプラス変換の性質

5．ラプラス変換を使った微分方程式の解法

## ラプラス変換の定義

$0 \le t < \infty$ の時間区間で

$$\int_0^{\infty} |f(t)| \exp(-ct)dt < \infty$$

なる実数 $c$ が存在する、関数 $f(t)$ で定義される時間関数のラプラス変換は、次のように定義される。

$$\boxed{\begin{aligned} F(s) &= L(f(t)) \\ &= \int_0^{\infty} f(t)\exp(-st)dt \end{aligned}}$$

$s$ はその実部 $\mathrm{Re}(s)$ が $c$ より大きい複素数で、通常はラプラス変換における変数を表す。



$F(s)$ が与えられるとき、時間関数 $f(t)$ はラプラス逆変換 $L^{-1}$ によって求められる。

$$f(t) = L^{-1}(F(s)) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)\exp(st)ds$$



## 本日の授業内容

1．ラプラス変換を使うと何が良いのか？

2．ラプラス変換の定義

3．重要な関数のラプラス変換

4．ラプラス変換の性質

5．ラプラス変換を使った微分方程式の解法

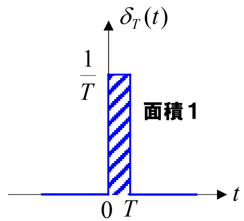


## 重要な関数のラプラス変換

デルタ関数、ステップ関数、

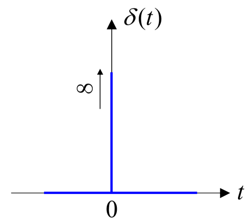
ランプ関数、指数関数、三角関数

## パルス関数




$$\delta_T(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 1/T & (0\le t\le T)\\ 0 & (T<t)\end{cases}$$

## デルタ関数（単位インパルス関数）




$$\delta(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ \infty & (t=0)\\ 0 & (t>0)\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$$



## 問題：デルタ関数のラプラス変換を求めよ。

$$\begin{aligned}F(s)&=L(\delta(t))\\ &=\int_0^{\infty}\delta(t)\cdot\exp(-st)dt\\ &=\exp(-s\times 0)\\ &=1\end{aligned}$$

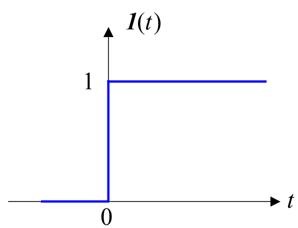
**デルタ関数の性質**

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t)dt=f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-t_0)dt=f(t_0)$$



## 単位ステップ関数



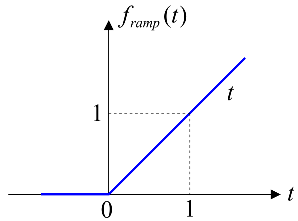

$$\boldsymbol{1}(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 1 & (0\le t)\end{cases}$$



## 問題：単位ステップ関数のラプラス変換を求めよ。

$$\begin{aligned}F(s)&=L(\boldsymbol{1}(t))\\ &=\int_0^{\infty}1\cdot\exp(-st)dt\\ &=\left[-\frac{1}{s}\exp(-st)\right]_0^{\infty}\\ &=\frac{1}{s}\left\{1-\lim_{t\to\infty}(\exp(-st))\right\}\\ &=\frac{1}{s}\qquad(\mathrm{Re}(s)>0)\end{aligned}$$

## 単位ランプ関数




$$f_{ramp}(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ t & (0\le t)\end{cases}$$



## 問題：単位ランプ関数のラプラス変換を求めよ。

$$\begin{aligned}F(s)&=L\left(f_{ramp}(t)\right)\\&=\int_0^\infty t\cdot\exp(-st)dt\\&=\left[-\frac{1}{s}t\cdot\exp(-st)\right]_0^\infty+\int_0^\infty\frac{1}{s}\cdot\exp(-st)dt\\&=-\frac{1}{s}\lim_{t\to\infty}\{t\cdot\exp(-st)\}+\frac{1}{s}\int_0^\infty\exp(-st)dt\\&=\frac{1}{s^2}\qquad(\mathrm{Re}(s)>0)\end{aligned}$$



## 問題：$f(t)=t^n$ のラプラス変換を求めよ。

$$\begin{aligned}F(s)&=L\left(t^n\right)\\&=\frac{n!}{s^{n+1}}\qquad(\mathrm{Re}(s)>0,\ n=1,2,\cdots)\end{aligned}$$

**数学的帰納法を使って証明。**



## 問題：$f(t)=\exp(\alpha t)$ のラプラス変換を求めよ。

$$\begin{aligned}F(s)&=L\left(\exp(\alpha t)\right)\\&=\int_0^\infty\exp(\alpha t)\cdot\exp(-st)dt\\&=\int_0^\infty\exp(-(s-\alpha)t)dt\\&=\left[-\frac{1}{s-\alpha}\exp(-(s-\alpha)t)\right]_0^\infty\\&=\frac{1}{s-\alpha}\left\{1-\lim_{t\to\infty}\left(\exp(-(s-\alpha)t)\right)\right\}\\&=\frac{1}{s-\alpha}\qquad(\mathrm{Re}(s)>\alpha)\end{aligned}$$

**問題： $f(t)=\sin(\omega t)$ のラプラス変換を求めよ。**

$$
\begin{aligned}
F(s) &= L(\sin(\omega t)) \\
&= \int_0^\infty \sin(\omega t)\cdot\exp(-st)dt \\
&= \left[-\frac{1}{s}\exp(-st)\cdot\sin(\omega t)\right]_0^\infty + \frac{\omega}{s}\int_0^\infty \cos(\omega t)\cdot\exp(-st)dt \\
&= \frac{\omega}{s}\int_0^\infty \cos(\omega t)\cdot\exp(-st)dt \\
&= \frac{\omega}{s}\left[-\frac{1}{s}\exp(-st)\cdot\cos(\omega t)\right]_0^\infty - \frac{\omega^2}{s^2}\int_0^\infty \sin(\omega t)\cdot\exp(-st)dt \\
&= \frac{\omega}{s^2} - \frac{\omega^2}{s^2}\int_0^\infty \sin(\omega t)\cdot\exp(-st)dt
\end{aligned}
$$



$$L(\sin(\omega t)) = \frac{\omega}{s^2} - \frac{\omega^2}{s^2}L(\sin(\omega t))$$

$$\frac{s^2+\omega^2}{s^2}L(\sin(\omega t)) = \frac{\omega}{s^2}$$

$$L(\sin(\omega t)) = \frac{\omega}{s^2}\cdot\frac{s^2}{s^2+\omega^2} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$



**問題： $f(t)=\cos(\omega t)$ のラプラス変換を求めよ。**

$$
\begin{aligned}
F(s) &= L(\cos(\omega t)) \\
&= \int_0^\infty \cos(\omega t)\cdot\exp(-st)dt \\
&= \left[-\frac{1}{s}\exp(-st)\cdot\cos(\omega t)\right]_0^\infty - \frac{\omega}{s}\int_0^\infty \sin(\omega t)\cdot\exp(-st)dt \\
&= \frac{1}{s} - \frac{\omega}{s}\int_0^\infty \sin(\omega t)\cdot\exp(-st)dt \\
&= \frac{1}{s} - \frac{\omega}{s}\left[-\frac{1}{s}\exp(-st)\cdot\sin(\omega t)\right]_0^\infty - \frac{\omega^2}{s^2}\int_0^\infty \cos(\omega t)\cdot\exp(-st)dt \\
&= \frac{1}{s} - \frac{\omega^2}{s^2}\int_0^\infty \cos(\omega t)\cdot\exp(-st)dt
\end{aligned}
$$



$$L(\cos(\omega t)) = \frac{1}{s} - \frac{\omega^2}{s^2}L(\cos(\omega t))$$

$$\frac{s^2+\omega^2}{s^2}L(\cos(\omega t)) = \frac{1}{s}$$

$$L(\cos(\omega t)) = \frac{1}{s}\cdot\frac{s^2}{s^2+\omega^2} = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

## 本日の授業内容

1．ラプラス変換を使うと何が良いのか？

2．ラプラス変換の定義

3．重要な関数のラプラス変換

4．ラプラス変換の性質

5．ラプラス変換を使った微分方程式の解法



## （１）線形性

ラプラス変換

$$f_1(t) \Rightarrow F_1(s) = \int_0^\infty f_1(t)\exp(-st)dt$$

$$f_2(t) \Rightarrow F_2(s) = \int_0^\infty f_2(t)\exp(-st)dt$$

$$\alpha f_1(t) + \beta f_2(t) \Rightarrow \int_0^\infty \{\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)\}\exp(-st)dt$$

$\alpha, \beta$ ：定数

$$= \alpha \int_0^\infty f_1(t)\exp(-st)dt + \beta \int_0^\infty f_2(t)\exp(-st)dt$$

$$= \alpha F_1(s) + \beta F_2(s)$$

**ラプラス変換は線形性を持つ（線形変換）**



## （２）$t$ 領域での推移　$L[f_L(t)] = \exp(-sL)\cdot F(s)$

$$f_L(t) = \begin{cases} f(t-L) & (t \geq L) \\ 0 & (t < L) \end{cases}$$

$$L(f_L(t)) = \int_0^\infty f_L(t)\exp(-st)dt$$

$$= \int_L^\infty f_L(t)\exp\{-s(t-L)\}\exp(-sL)dt$$

$$= \exp(-sL)\cdot\int_L^\infty f_L(t)\exp\{-s(t-L)\}dt$$

$t' = t - L$ とおくと、

$$L(f_L(t)) = \exp(-sL)\cdot\int_0^\infty f(t')\exp(-st')dt'$$

$$= \exp(-sL)\cdot F(s)$$



## （３）$s$ 領域での推移　$L(\exp(-\alpha t)\cdot f(t)) = F(s+\alpha)$

$$L(\exp(-\alpha t)\cdot f(t)) = \int_0^\infty \exp(-\alpha t)\cdot f(t)\cdot\exp(-st)dt$$

$$= \int_0^\infty f(t)\cdot\exp(-(s+\alpha)t)dt$$

$$= F(s+\alpha)$$

## （４）$t$ 領域での微分

$$L\left(f^{(1)}(t)\right)=sF(s)-f(0)$$
$$L\left(f^{(2)}(t)\right)=s^2F(s)-sf(0)-f^{(1)}(0)$$
$$L\left(f^{(k)}(t)\right)=s^kF(s)-\sum_{i=1}^{k}s^{k-i}f^{(i-1)}(0)$$

$$\begin{aligned}L\left(f^{(1)}(t)\right)&=\int_0^\infty\left(\frac{df(t)}{dt}\right)\cdot\exp(-st)dt\\&=\left[f(t)\cdot\exp(-st)\right]_0^\infty-\int_0^\infty f(t)\cdot\left(\frac{d\exp(-st)}{dt}\right)dt\\&=\lim_{t\to\infty}\left(f(t)\cdot\exp(-st)\right)-f(0)+s\int_0^\infty f(t)\cdot\exp(-st)dt\\&=sF(s)-f(0)\qquad\because\lim_{t\to\infty}\left|f(t)\cdot\exp(-st)\right|=0\end{aligned}$$



## （５） $t$ 領域での積分

$$L\left(f^{(-1)}(t)\right)=\frac{1}{s}F(s)+\frac{1}{s}f^{(-1)}(0)$$
$$L\left(f^{(-2)}(t)\right)=\frac{1}{s^2}F(s)+\frac{1}{s^2}f^{(-1)}(0)+\frac{1}{s}f^{(-2)}(0)$$
$$L\left(f^{(-k)}(t)\right)=\frac{1}{s^k}F(s)+\sum_{i=0}^{k-1}s^{-(k-i)}f^{-(i+1)}(0)$$

$$\begin{aligned}L\left(f^{(-1)}(t)\right)&=\int_0^\infty\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right)\cdot\exp(-st)dt\\&=\left[-\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right)\cdot\frac{1}{s}\exp(-st)\right]_0^\infty+\int_0^\infty f(t)\cdot\frac{1}{s}\exp(-st)dt\\&=\frac{1}{s}F(s)+\frac{1}{s}f^{(-1)}(0)\end{aligned}$$



## （６）$s$ 領域での微分 $L(tf(t))=-\dfrac{dF(s)}{ds}$

$$\begin{aligned}-\frac{dF(s)}{ds}&=-\frac{d}{ds}\left(\int_0^\infty f(t)\cdot\exp(-st)dt\right)\\&=-\int_0^\infty\frac{d}{ds}\left(f(t)\cdot\exp(-st)\right)dt\\&=-\int_0^\infty f(t)\cdot(-t)\exp(-st)dt\\&=\int_0^\infty tf(t)\cdot\exp(-st)dt\\&=L\left(tf(t)\right)\end{aligned}$$

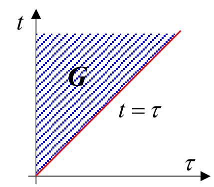


## （７）畳み込み積分のラプラス変換

$$y(t)=\int_0^t g(\tau)f(t-\tau)d\tau$$

$$L\left(y(t)\right)=L\left(g(t)\right)\cdot L\left(f(t)\right)$$

$$L(g(t))\cdot L(f(t)) = \int_0^\infty g(t)\exp(-st)dt \cdot \int_0^\infty f(t)\exp(-st)dt$$
$$= \int_0^\infty g(u)\exp(-su)du \cdot \int_0^\infty f(v)\exp(-sv)dv$$
$$= \int_0^\infty \int_0^\infty g(u)f(v)\exp(-s(u+v))dudv$$
$$= \iint_G g(\tau)f(t-\tau)\exp(-s(u+v))dudv$$
$$= \int_0^\infty \left[\int_0^t g(\tau)f(t-\tau)d\tau\right]\exp(-st)dt$$
$$= L\left(\int_0^t g(\tau)f(t-\tau)d\tau\right)$$
$$= L(y(t))$$






# （８）初期値の定理 $\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = f(0) + \lim_{s\to\infty}\int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}\cdot\exp(-st)dt$$
$$= f(0) + \int_0^\infty \lim_{s\to\infty}\frac{df(t)}{dt}\cdot\exp(-st)dt$$
$$= f(0)$$
$$= \lim_{t\to 0} f(t)$$

$$L\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = sF(s) - f(0)$$
$$sF(s) = f(0) + L\left(\frac{df(t)}{dt}\right)$$



# （９）最終値の定理 $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$

$$\lim_{s\to 0} sF(s) = f(0) + \lim_{s\to 0}\int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}\cdot\exp(-st)dt$$
$$= f(0) + \int_0^\infty \lim_{s\to 0}\frac{df(t)}{dt}\cdot\exp(-st)dt$$
$$= f(0) + \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}dt$$
$$= f(0) + [f(t)]_0^\infty$$
$$= f(0) + \lim_{t\to\infty} f(t) - f(0)$$
$$= \lim_{t\to\infty} f(t)$$

$$L\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = sF(s) - f(0)$$
$$sF(s) = f(0) + L\left(\frac{df(t)}{dt}\right)$$

**ただし、$sF(s)$ が $s$ 平面の虚軸を含む右半平面で正則の場合にのみ意味を持つ。**



# 本日の授業内容

1．ラプラス変換を使うと何が良いのか？

2．ラプラス変換の定義

3．重要な関数のラプラス変換

4．ラプラス変換の性質

**5．ラプラス変換を使った微分方程式の解法**

**問題：次の微分方程式をラプラス変換を用いて解け。**

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+3\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)=0, \quad x(0)=1,\ \frac{dx(0)}{dt}=0$$

**問題の微分方程式をラプラス変換すると、**

$$s^2X(s)-s+3sX(s)-3+2X(s)=0$$

$X(s)$ **について解くと、**

$$\left(s^2+3s+2\right)X(s)=s+3$$

$$X(s)=\frac{s+3}{s^2+3s+2}=\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$



$X(s)$ **を部分分数に展開する。**

$$X(s)=\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}$$

$$A=\boxed{\phantom{xxxxx}}=\boxed{\phantom{xxx}}=2$$

$$B=\boxed{\phantom{xxxxx}}=\boxed{\phantom{xxx}}=-1$$

$$X(s)=\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2}$$

**これをラプラス逆変換すると、**

$$x(t)=\boxed{\phantom{xxxxxxx}}$$



**問題：次の微分方程式をラプラス変換を用いて解け。**

$$\frac{dx(t)}{dt}=-5x(t)+1, \quad x(0)=0$$

$$sX(s)=-5X(s)+\frac{1}{s}$$

$$(s+5)X(s)=\frac{1}{s}$$

$$X(s)=\frac{1}{s(s+5)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+5}$$

$$A=\left.\frac{1}{s+5}\right|_{s=0}=\frac{1}{5}, \quad B=\left.\frac{1}{s}\right|_{s=-5}=-\frac{1}{5}$$

$$X(s)=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+5}\right) \qquad x(t)=\frac{1}{5}(1-\exp(-5t))$$



# 補足：部分分数への展開（１）

$$\frac{2}{(s+5)(s^2+4)}=\frac{A}{s+5}+\frac{Bs+C}{s^2+4}$$
$$=\frac{(A+B)s^2+(5B+C)s+4A+5C}{(s+5)(s^2+4)}$$

$$A+B=0$$
$$5B+C=0 \qquad \therefore A=\frac{2}{29},\ B=-\frac{2}{29},\ C=\frac{10}{29}$$
$$4A+5C=2$$

$$\frac{2}{(s+5)(s^2+4)}=\frac{2}{29}\frac{1}{s+5}-\frac{1}{29}\frac{2s-10}{s^2+4}$$

## 補足：部分分数への展開（２）

$$\frac{2}{(s+5)(s^2+4)}=\frac{A}{s+5}+\frac{B}{s-2j}+\frac{C}{s+2j}$$

$$A=\left.\frac{2}{s^2+4}\right|_{s=-5}=\frac{2}{29}$$

$$B=\left.\frac{2}{(s+5)(s+2j)}\right|_{s=2j}=\frac{-2-5j}{58},\ C=\left.\frac{2}{(s+5)(s-2j)}\right|_{s=-2j}=\frac{-2+5j}{58}$$

$$\frac{2}{(s+5)(s^2+4)}=\frac{2}{29}\frac{1}{s+5}+\frac{-2-5j}{58}\frac{1}{s-2j}+\frac{-2+5j}{58}\frac{1}{s+2j}$$

$$=\frac{2}{29}\frac{1}{s+5}+\frac{1}{29}\frac{-2s+10}{s^2+4}$$



## ２年前の小テスト



**問１：次の微分方程式をラプラス変換を用いて解け。**

$$\frac{dx(t)}{dt}+6x(t)=\boldsymbol{1}(t),\quad x(0)=0.0$$

**解答：**

$$sX(s)+6X(s)=\frac{1}{s}$$

$$(s+6)X(s)=\frac{1}{s}$$

$$X(s)=\frac{1}{s(s+6)}$$

$$X(s)=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+6}$$

$$A=sX(s)\big|_{s=0}=\left.\frac{1}{s+6}\right|_{s=0}=\frac{1}{6}$$

$$B=(s+6)X(s)_{s=-6}=\left.\frac{1}{s}\right|_{s=-6}=-\frac{1}{6}$$

$$X(s)=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+6}\right)$$

$$\therefore x(t)=\frac{1}{6}\left(\boldsymbol{1}(t)-\exp(-6t)\right)$$



**問２：次の微分方程式をラプラス変換を用いて解け。**

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+5\frac{dx(t)}{dt}+6x(t)=\exp(-t),\quad x(0)=1.0,\ dx(0)/dt=0.0$$

**解答：**

$$s^2X(s)-s+5sX(s)-5+6X(s)=\frac{1}{s+1}$$

$$\left(s^2+5s+6\right)X(s)=\frac{1}{s+1}+s+5$$

$$(s+2)(s+3)X(s)=\frac{s^2+6s+6}{s+1}$$

$$X(s)=\frac{s^2+6s+6}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$X(s)=\frac{s^2+6s+6}{(s+1)(s+2)(s+3)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s+3}$$

$$A=(s+1)X(s)\big|_{s=-1}=\frac{1-6+6}{1\times 2}=\frac{1}{2}$$

$$B=(s+2)X(s)\big|_{s=-2}=\frac{4-12+6}{(-1)\times 1}=2$$

$$C=(s+3)X(s)\big|_{s=-3}=\frac{9-18+6}{(-2)\times(-1)}=-\frac{3}{2}$$

$$X(s)=\frac{1}{2}\frac{1}{s+1}+2\frac{1}{s+2}-\frac{3}{2}\frac{1}{s+3}$$

$$\therefore x(t)=\frac{1}{2}\exp(-t)+2\exp(-2t)-\frac{3}{2}\exp(-3t)$$