システムダイナミックス

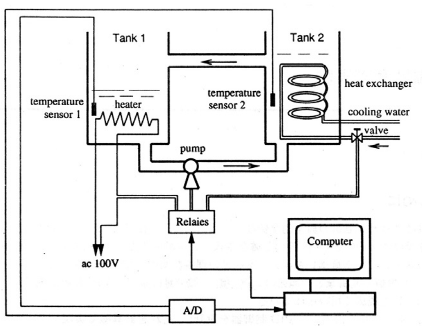
第５回　熱系・流体系のモデリングとアナロジー

本日の授業内容

1．熱系のモデリング

2．流体系のモデリング

3．アナロジー



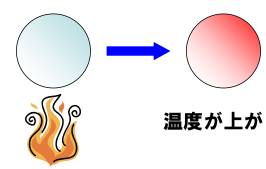
$$C_1\frac{dT_1(t)}{dt}=q_1(t)-c_wq_0\big(T_1(t)-T_2(t)\big)-k_1T_1(t)$$

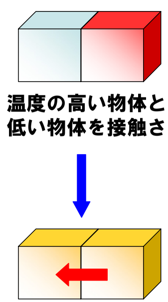
$$C_2\frac{dT_2(t)}{dt}=-q_2(t)+c_wq_0\big(T_1(t)-T_2(t)\big)-k_2T_2(t)$$

熱とは？

熱はエネルギーの１形態。

熱と温度は異なる！





熱量の単位

常圧で 1g の水を 1K 上げるのに
必要な熱量（エネルギー）を 1cal と決める。

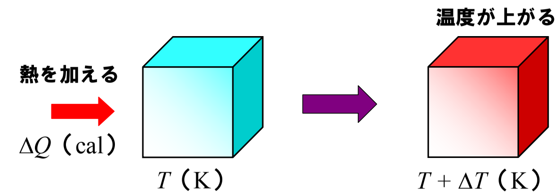
$1\ [\mathrm{cal}] = 4.186\ [\mathrm{J}]$

温度の単位

絶対温度（熱力学温度）を使う。

絶対温度 T K とセルシウス温度 θ℃
の関係： $T = \theta + 273.15$

熱容量と比熱



熱容量（cal/K）**＝ 加えた熱量 / 上がった温度**

$C = \Delta Q / \Delta T$

熱容量（cal/K）**＝比熱**（cal/K/g）**×物質の質量**（g）

水の比熱は約 1 cal/K/g

熱平衡方程式

$C = \dfrac{\Delta Q}{\Delta T} \Rightarrow C \cdot \Delta T = \Delta Q$

熱容量×温度変化＝加えた熱量

$\Delta Q = q_i \cdot \Delta t$　q_i：**単位時間あたり加える熱量**（cal/min）
Δt：**熱を加えた時間**（min）

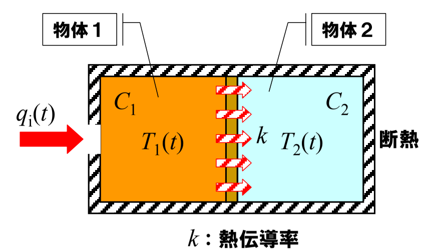
$C \cdot \Delta T = q_i \cdot \Delta t$

$C \cdot \dfrac{\Delta T}{\Delta t} = q_i \xrightarrow{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{dT}{dt}} C \cdot \dfrac{dT}{dt} = q_i$

出ていく熱も
ある場合

$\boxed{C \cdot \dfrac{dT}{dt} = q_i - q_o}$

熱平衡方程式
（熱系のダイナミクス）



物体１

加わる熱量：
$q_i(t)$

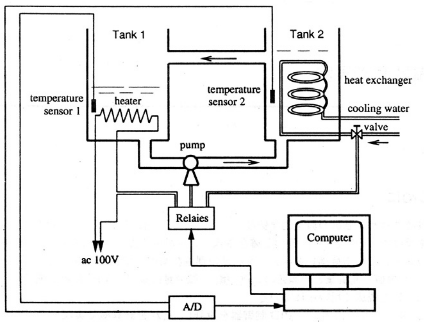
出ていく熱量：

物体２

加わる熱量：

$C_1 \dfrac{dT_1(t)}{dt} =$

$C_2 \dfrac{dT_2(t)}{dt} =$



$$C_1\frac{dT_1(t)}{dt}=q_1(t)-c_wq_0\left(T_1(t)-T_2(t)\right)-k_1T_1(t)$$

$$C_2\frac{dT_2(t)}{dt}=-q_2(t)+c_wq_0\left(T_1(t)-T_2(t)\right)-k_2T_2(t)$$

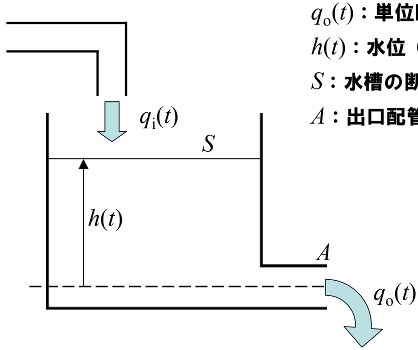
本日の授業内容

1．熱系のモデリング

2．流体系のモデリング

3．アナロジー

タンクシステム（流体系）



$q_i(t)$：単位時間あたりの流入量（m^3/s）

$q_o(t)$：単位時間あたりの流出量（ m^3/s ）

$h(t)$：水位（m）

S：水槽の断面積（m^2）

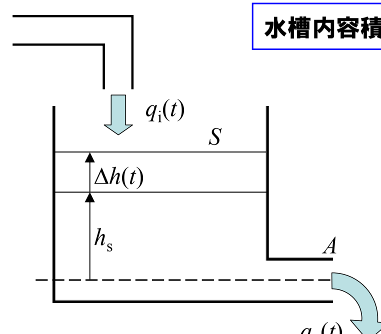
A：出口配管径の断面積（m^2）

入力：$q_i(t)$

出力：$h(t)$

微少時間 Δt に対する
水位の変化分 $\Delta h(t)$ を考えると、

水槽内容積の変化 ＝ 流入量 − 流出量



タンクシステムの
ダイナミクス

$$\boxed{S\frac{dh(t)}{dt}=q_i(t)-q_o(t)}$$

$$\because \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta h(t)}{\Delta t}=\frac{dh(t)}{dt}$$

流出量

$q_o(t) : $ 単位時間あたりの流出量（ m^3/s ）
$v_o(t) : $ 流出速度（m/s）
$A : $ 出口配管径の断面積（m^2）

$$q_o(t) = Av_o(t)$$

$$v_o(t) = \sqrt{2gh(t)}$$
（ベルヌーイの定理から）

$$q_o(t) = A\sqrt{2gh(t)} \quad (m^3/s)$$

タンクシステムのダイナミクス

$$S\frac{dh(t)}{dt} = q_i(t) - q_o(t)$$
$$= q_i(t) - \boxed{A\sqrt{2gh(t)}}$$

非線形システム

非線形システム　　難しい

↓ 線形化（近似）

線形システム　　易しい

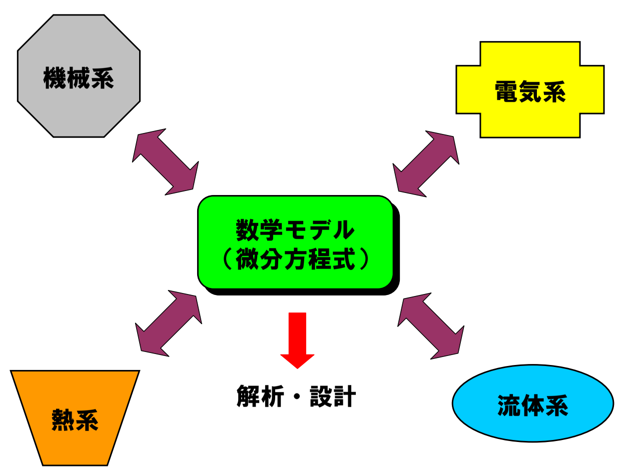
↑
古典制御理論
現代制御理論

本日の授業内容

1．熱系のモデリング

2．流体系のモデリング

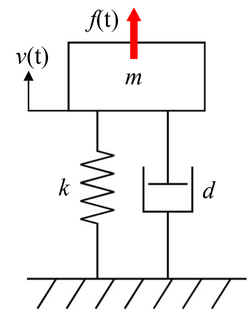
3．アナロジー



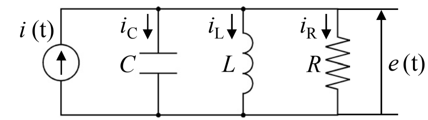
アナロジー（類推）って何？

類似点に基づき他の事をおしはかること。
二つの特殊事例が本質的な点において一致することから、他の属性に関しても類似が存在すると推論すること。
似たところをもととして他の事も同じだろうと考えること。

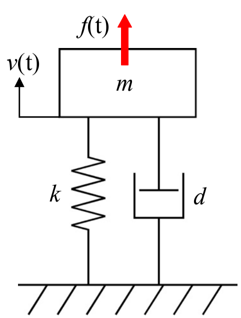
広辞苑　第五版、岩波書店



バネーマスーダンパ系



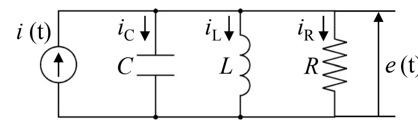
ＲＬＣ回路



$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}+d\frac{dx(t)}{dt}+kx(t)=f(t)$$

$$v(t)=\frac{dx(t)}{dt}$$

$$\boxed{m\frac{dv(t)}{dt}+dv(t)+k\int v(t)dt=f(t)}$$



コンデンサ： $e(t)=\frac{1}{C}\int i_C(t)dt \Rightarrow i_C(t)=C\frac{de(t)}{dt}$

コイル： $e(t)=L\frac{di_L(t)}{dt} \Rightarrow i_L(t)=\frac{1}{L}\int e(t)dt$

抵抗： $e(t)=Ri_R(t) \Rightarrow i_R(t)=\frac{1}{R}e(t)$

キルヒホッフの電流の法則： $i(t)=i_C(t)+i_L(t)+i_R(t)$

$$\boxed{C\frac{de(t)}{dt}+\frac{1}{R}e(t)+\frac{1}{L}\int e(t)dt=i(t)}$$

$$m\frac{dv(t)}{dt}+dv(t)+k\int v(t)dt=f(t)$$

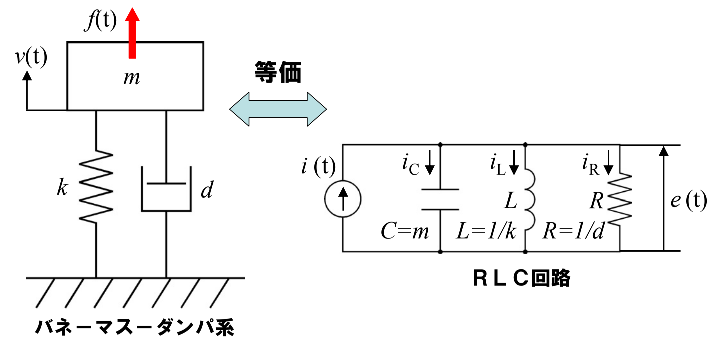
$$C\frac{de(t)}{dt}+\frac{1}{R}e(t)+\frac{1}{L}\int e(t)dt=i(t)$$

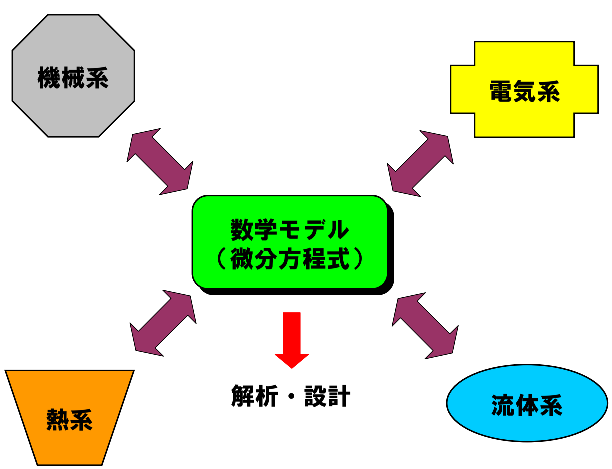
モビリティ類推
（カー電流相似）

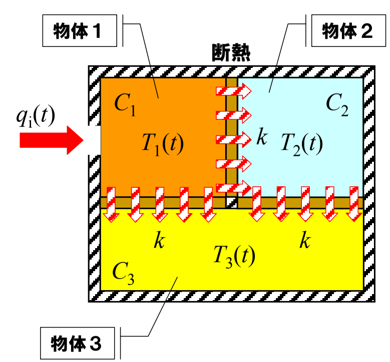
力：f(t) ⟺ **電流**：i(t)

速度：v(t) ⟺ **電圧**：e(t)

$$C=m,\quad R=\frac{1}{d},\quad L=\frac{1}{k}$$







C_i：**物体iの熱容量**

T_i：**物体iの温度**

k：**物体間の物質の熱伝導率**

q_i：**物体１に加わる熱量**