システムダイナミックス

第４回　電気系のモデリング

本日の授業内容

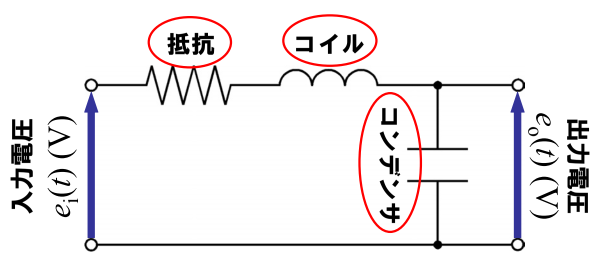
1．抵抗、コイル、コンデンサ

2．キルヒホッフの法則

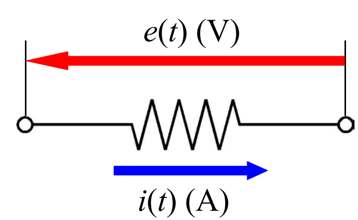
3．ＲＣ回路、ＲＬ回路、ＲＬＣ回路

4．ＲＣ回路の直列接続

ＲＬＣ回路



抵抗（電圧と電流の関係）



$$e(t) = Ri(t)$$

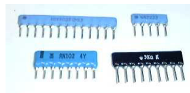
R：抵抗（Ω）

カーボン抵抗器

1/8W
1/4W
1/2W

1/4W**金属皮膜**1%
1W**酸化金属皮膜**

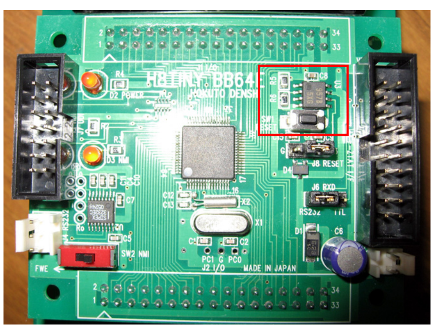
セメント抵抗
10W、7W、3W**タイプ**



集合抵抗

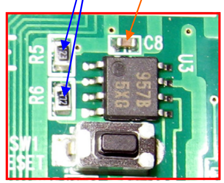
© http://www.picfun.com/partframe.html

携帯などに入っているチップ抵抗とはどんな物か？

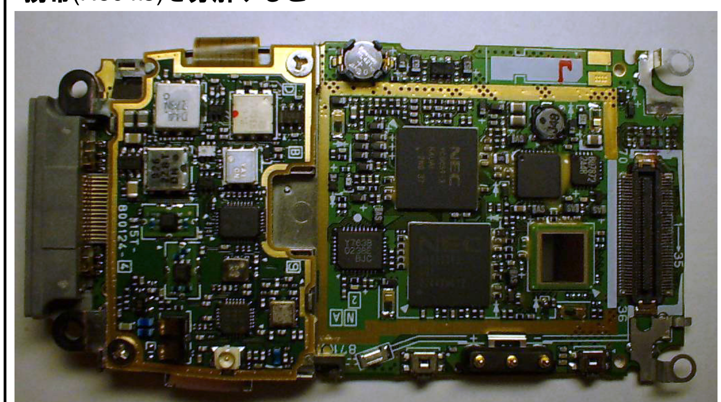


これ

こっちは コンデンサ

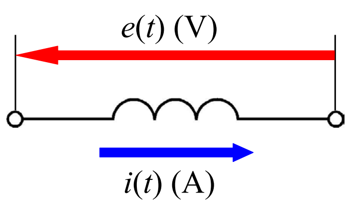


携帯(N504is)を分解すると



© http://www.from-ni.org/junks/keitai2/

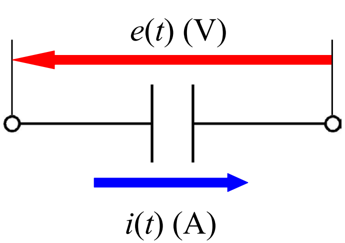
コイル（電圧と電流の関係）



$$e(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

L：インダクタンス（H）

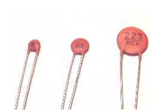
コンデンサ（電圧と電流の関係）



$$e(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

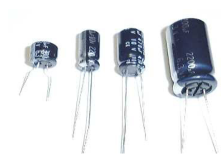
C：キャパシタンス（F）

μF (10^{-6}F)：マイクロファラド
pF (10^{-12}F)：ピコファラド



セラミックコンデンサ

積層セラミックコンデンサ



電解コンデンサ

本日の授業内容

1．抵抗、コイル、コンデンサ

2．キルヒホッフの法則

3．ＲＣ回路、ＲＬ回路、ＲＬＣ回路

4．ＲＣ回路の直列接続

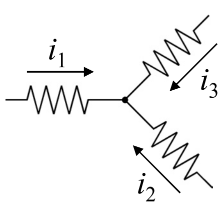
キルヒホッフの法則

電流の法則：
回路の一点に加わる電流の和は０である。すなわち、その点に流れ込む電流の和は、流れ出る電流の和に等しい。

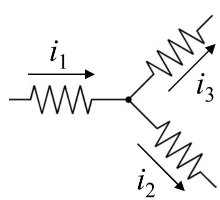
電圧の法則：
閉回路において、各素子にかかる電圧の和は０である。すなわち、回路に加わる電圧は、回路の各素子にかかる電圧の和になる。

キルヒホッフの電流の法則

回路の一点に加わる電流の和は０である。すなわち、
その点に流れ込む電流の和は、流れ出る電流の和に等しい。



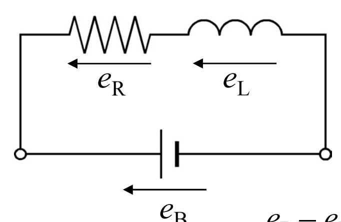
$$i_1+i_2+i_3=0$$



$$i_1=i_2+i_3$$

キルヒホッフの電圧の法則

閉回路において、各素子にかかる電圧の和は０である。
すなわち、回路に加わる電圧は、回路の各素子にかかる
電圧の和になる。



$$e_B-e_R-e_L=0$$
$$e_B=e_R+e_L$$

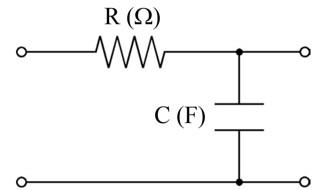
本日の授業内容

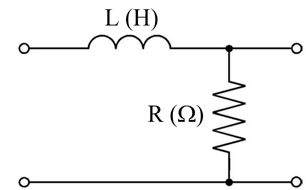
1．抵抗、コイル、コンデンサ

2．キルヒホッフの法則

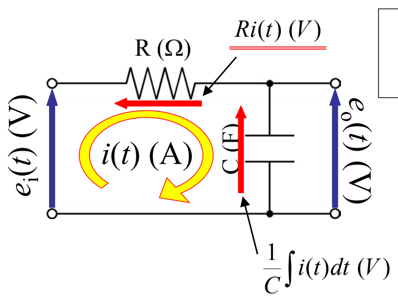
3．ＲＣ回路、ＲＬ回路、ＲＬＣ回路

4．ＲＣ回路の直列接続





ＲＣ回路



キルヒホッフの電圧の法則

$$\boxed{} = e_i(t)$$

$$e_o(t) = \boxed{}$$

$$\boxed{} = e_i(t) \quad \cdot\cdot\cdot（１）$$

$$e_o(t) = \boxed{} \quad \cdot\cdot\cdot（２）$$

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + f(t)}$$

定数変化法で解いた
微分方程式

式（２）の両辺を微分すると

$$\frac{de_o(t)}{dt} = \frac{1}{C}i(t) \Rightarrow i(t) = C\frac{de_o(t)}{dt} \quad \cdot\cdot\cdot（３）$$

同じ形

式（２）と式（３）を式（１）に代入すると

$$RC\frac{de_o(t)}{dt} + e_o(t) = e_i(t) \Rightarrow \boxed{\frac{de_o(t)}{dt} = -\frac{1}{RC}e_o(t) + \frac{1}{RC}e_i(t)}$$

ＲＣ回路のダイナミクス

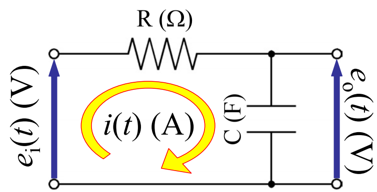
例題：下図のＲＣ回路において、入力電圧 $e_{\mathrm{i}}(t)$ と初期出力電圧 $e_{\mathrm{o}}(0)$ が次式で与えられるとする。この時の出力電圧 $e_{\mathrm{o}}(t)$を求めよ。ただし、$\mathrm{R}=2\mathrm{k}\Omega$、$\mathrm{C}=5\mu\mathrm{F}$ とする。

入力電圧：

$$e_i(t)=\begin{cases}0V & (t<0)\\ 1V & (t\ge 0)\end{cases}$$

初期出力電圧：

$$e_o(0)=0V$$



解答：

テストの時には、この導出を省略しないこと

１７ページのやり方でダイナミクスを導出すると

$$\frac{de_o(t)}{dt}=-\frac{1}{RC}e_o(t)+\frac{1}{RC}e_i(t) \quad \cdot\cdot\cdot（１）$$

ここで、$e_o(t)=A(t)\exp(-\alpha t)$・・・（２）とおく。ただし、$\alpha=1/RC$

初期条件は、$e_o(0)=A(0)=0$ となる。

式（２）の両辺を微分すると、

$$\frac{de_o(t)}{dt}=\frac{dA(t)}{dt}\exp(-\alpha t)-\alpha A(t)\exp(-\alpha t) \quad \cdot\cdot\cdot（３）$$

となるので、この式（３）と式（２）を式（１）に代入すると、

$$\frac{dA(t)}{dt}\exp(-\alpha t)-\cancel{\alpha A(t)\exp(-\alpha t)}=-\cancel{\alpha A(t)\exp(-\alpha t)}+\alpha e_i(t)$$

$$\frac{dA(t)}{dt}=\alpha\exp(\alpha t)e_i(t) \quad \cdot\cdot\cdot（４）$$

式（４）の両辺を積分すると、

$$A(t)=A(0)+\int_0^t \alpha\exp(\alpha\tau)e_i(\tau)d\tau$$

$$=\int_0^t \alpha\exp(\alpha\tau)d\tau=[\exp(\alpha\tau)]_0^t=\exp(\alpha t)-1 \quad \cdot\cdot\cdot（５）$$

式（５）を式（２）に代入すれば、

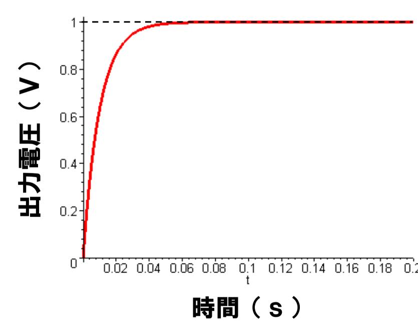
$$e_o(t)=\{\exp(\alpha t)-1\}\cdot\exp(-\alpha t)$$

$$=1-\exp(-\alpha t)=\boxed{1-\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)}$$

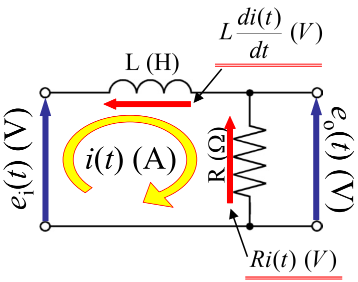
$RC=2k\times5\mu=2\times10^3\times5\times10^{-6}=10^{-2}$ と計算できるので、

$$\boxed{\therefore e_o(t)=1-\exp(-100t)}$$

$$e_o(t)=1-\exp(-100t)$$



ＲＬ回路



キルヒホッフの電圧の法則

$$\boxed{} = e_i(t)$$

$$e_o(t) = \boxed{}$$

$$\boxed{} = e_i(t) \quad \cdot\cdot\cdot（１）$$

$$e_o(t) = \boxed{} \quad \cdot\cdot\cdot（２）$$

式（２）を電流 $i(t)$ について解くと

$$i(t) = \frac{1}{R}e_o(t) \quad \cdot\cdot\cdot（３）$$

式（３）の両辺を微分すると

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{R}\frac{de_o(t)}{dt} \quad \cdot\cdot\cdot（４）$$

式（２）と式（４）を式（１）に代入すると

$$\frac{L}{R}\frac{de_o(t)}{dt} + e_o(t) = e_i(t) \Rightarrow \boxed{\frac{de_o(t)}{dt} = -\frac{R}{L}e_o(t) + \frac{R}{L}e_i(t)}$$

ＲＬ回路のダイナミクス

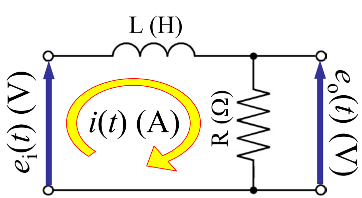
例題：下図のＲＬ回路において、入力電圧 $e_i(t)$ と初期出力電圧 $e_o(0)$ が次式で与えられるとする。この時の出力電圧 $e_o(t)$を求めよ。ただし、R = 5Ω、L = 100mH とする。

入力電圧：

$$e_i(t) = \begin{cases} 0V & (t < 0) \\ 1V & (t \geq 0) \end{cases}$$

初期出力電圧：

$$e_o(0) = 0V$$



解答：

解答方法はＲＣ回路の場合と同じなので、詳細は省略。

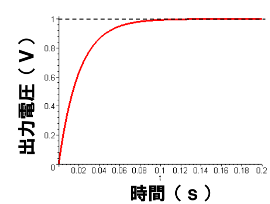
答え：

$$e_o(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{L/R}\right)$$

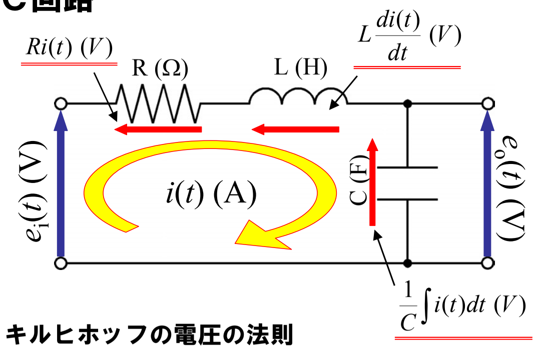
$$L/R = \frac{100m}{5} = \frac{100 \times 10^{-3}}{5} = 2 \times 10^{-2}$$

$$e_o(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{2 \times 10^{-2}}\right)$$

$$= 1 - \exp(-50t)$$



ＲＬＣ回路



キルヒホッフの電圧の法則

・・・（１）

・・・（２）

式（２）を微分すると

$$\frac{de_o(t)}{dt}=\frac{1}{C}i(t) \Rightarrow i(t)=C\frac{de_o(t)}{dt} \quad ・・・（３）$$

式（３）を微分すると

$$\frac{di(t)}{dt}=C\frac{d^2e_o(t)}{dt^2} \quad ・・・（４）$$

式（２）、（３）、（４）を式（１）に代入すると

$$\boxed{RC\frac{de_o(t)}{dt}+LC\frac{d^2e_o(t)}{dt^2}+e_o(t)=e_i(t)}$$

微分方程式を導出するところまでで良い。

ＲＬＣ回路のダイナミクス

本日の授業内容

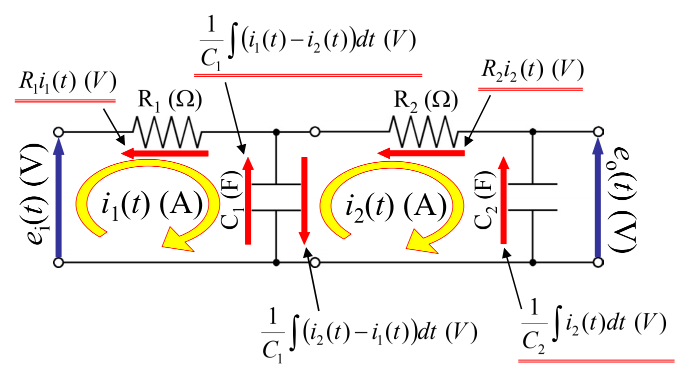
1．抵抗、コイル、コンデンサ

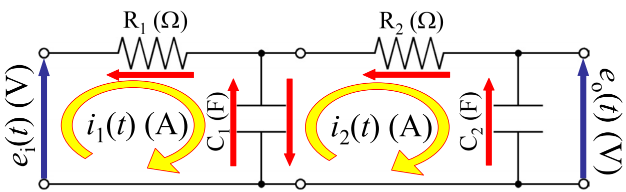
2．キルヒホッフの法則

3．ＲＣ回路、ＲＬ回路、ＲＬＣ回路

4．ＲＣ回路の直列接続

ＲＣ回路を直列接続





キルヒホッフの電圧の法則

$$R_1 i_1(t) + \frac{1}{C_1}\int (i_1(t) - i_2(t))dt = e_i(t) \quad ・・・（１）$$

$$R_2 i_2(t) + \frac{1}{C_2}\int i_2(t)dt + \frac{1}{C_1}\int (i_2(t) - i_1(t))dt = 0 \quad ・・・（２）$$

$$e_o(t) = \frac{1}{C_2}\int i_2(t)dt \quad ・・・（３）$$

式（３）の両辺を微分すると

$$i_2(t) = C_2 \frac{de_o(t)}{dt} \quad ・・・（４）$$

式（３）と式（４）を式（２）に代入すると

$$\frac{1}{C_1}\int (i_1(t) - i_2(t))dt = R_2 C_2 \frac{de_o(t)}{dt} + e_o(t) \quad ・・・（５）$$

式（５）の両辺を微分し、式（４）を代入すると

$$i_1(t) - C_2 \frac{de_o(t)}{dt} = R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 e_o(t)}{dt^2} + C_1 \frac{de_o(t)}{dt}$$

$$i_1(t) = R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 e_o(t)}{dt^2} + (C_1 + C_2)\frac{de_o(t)}{dt} \quad ・・・（６）$$

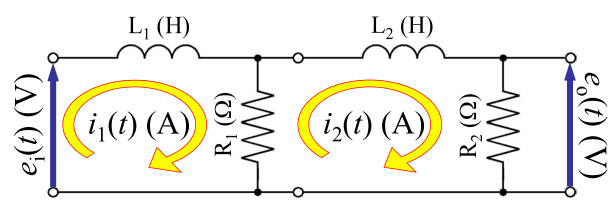
式（５）と式（６）を式（１）に代入すると

$$R_1 R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 e_o(t)}{dt^2} + R_1(C_1 + C_2)\frac{de_o(t)}{dt} + R_2 C_2 \frac{de_o(t)}{dt} + e_o(t) = e_i(t)$$

$$\boxed{R_1 R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 e_o(t)}{dt^2} + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2)\frac{de_o(t)}{dt} + e_o(t) = e_i(t)}$$

直列接続されたＲＣ回路のダイナミクス

ＲＬ回路を直列接続



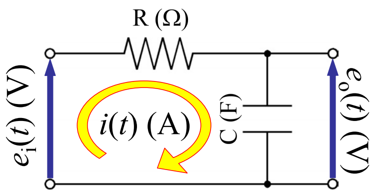
練習問題１：
下図のＲＣ回路において、入力電圧 $e_i(t)$ と初期出力電圧 $e_o(0)$ が次式で与えられるとする。この時の出力電圧 $e_o(t)$を求めよ。ただし、$R = 50k\Omega$、$C = 30\mu F$ **とする。**

入力電圧：

$$e_i(t) = \begin{cases} 0V & (t < 0) \\ 5V & (t \geq 0) \end{cases}$$

初期出力電圧：

$$e_o(0) = 0V$$



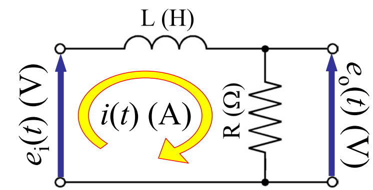
練習問題２：
下図のＲＬ回路において、入力電圧 $e_i(t)$ と初期出力電圧 $e_o(0)$ が次式で与えられるとする。この時の出力電圧 $e_o(t)$を求めよ。ただし、$R = 10\Omega$、$L = 500mH$ **とする。**

入力電圧：

$$e_i(t) = \begin{cases} 0V & (t < 0) \\ 3V & (t \geq 0) \end{cases}$$

初期出力電圧：

$$e_o(0) = 0V$$



練習問題１の答え：

$$e_o(t) = 5 \cdot \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{t}{RC} \right) \right\}$$
$$= 5 \cdot \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{t}{1.5} \right) \right\}$$

練習問題２の答え：

$$e_o(t) = 3 \cdot \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{t}{L/R} \right) \right\}$$
$$= 3 \cdot \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{t}{0.05} \right) \right\}$$