システムダイナミックス

第３回　機械系のモデリング

本日の授業内容

1．ニュートンの法則の復習

2．バネーマス系のモデリング

3．バネーマスーダンパ系のモデリング

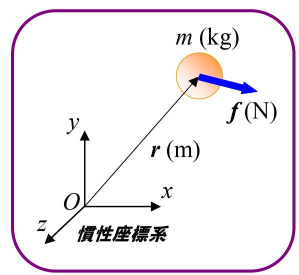
ニュートンの運動の法則

ニュートンの運動の第１法則：
物体は、他のすべての物体から十分遠く離れていて何らの影響も受けていない状態では、静止または等速運動を続ける。

ニュートンの運動の第２法則：
物体が力を受けると、その力の方向に加速度を生じ、その加速度の大きさは力の大きさに比例し、物体の質量に逆比例する。

ニュートンの運動の第３法則：
２つの質点が互いにおよぼし合う力はそれらを結ぶ線上にあって、大きさが等しく向きが反対である。

ニュートンの運動方程式



$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}(t)}{dt^2}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{f}_i$$

（質量）×（加速度）
＝（作用している力の和）

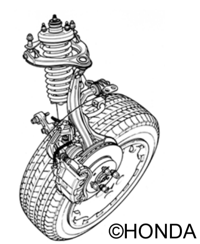
本日の授業内容

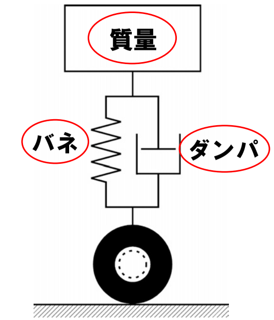
1．ニュートンの法則の復習

2．バネーマス系のモデリング

3．バネーマスーダンパ系のモデリング

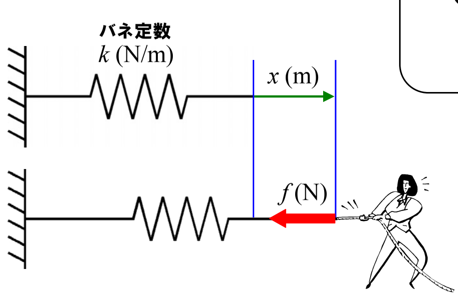
実物 → 物理モデル





バネーマスーダンパ系

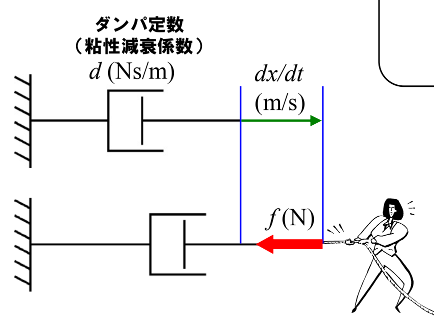
理想的なバネ



力 f と変位 x の関係
（フックの法則）

$$f = -kx$$

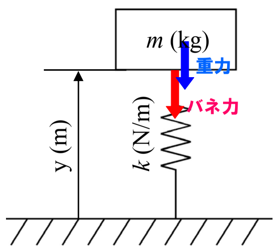
理想的なダンパ（ダッシュポット）



力 f と速度 dx/dt の関係

$$f = -d\frac{dx}{dt}$$

バネーマス系



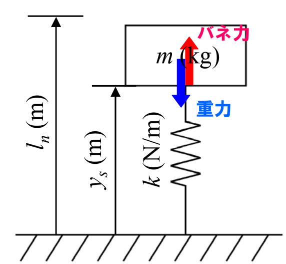
ニュートンの運動方程式から

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} = \underbrace{-mg}_{\text{重力}} \underbrace{-k(y(t)-l_n)}_{\text{バネ力}}$$

l_n：バネの自然長

座標変換で簡単な形に変形する

釣り合いの問題（静力学）



（＊）バネ力のベクトルの向きが
前のページと異なるけど・・・

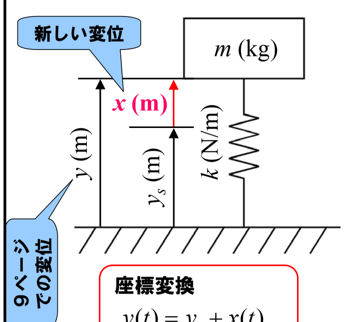
バネの縮み量：

バネの力：

重力：

∴

座標変換 （釣り合っている状態からの変位を新しい変位にする）



座標変換
$y(t) = y_s + x(t)$

$dy(t)/dt = dx(t)/dt$

$d^2y(t)/dt^2 = d^2x(t)/dt^2$

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -mg - k(y(t)-l_n)$$

⇩

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -mg - k(y_s + x(t) - l_n)$$

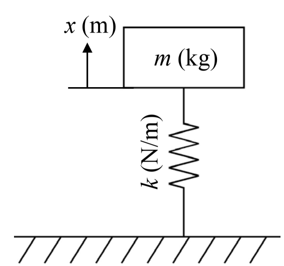
$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \cancel{-mg} - kx(t) \cancel{-k(y_s - l_n)}$$

$$\because mg = k(l_n - y_s)$$

⇩

$$\boxed{m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t)}$$

バネーマス系



運動方程式

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx$$

両辺を質量mで割ると、

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$
$$= -\omega_n^2 x$$

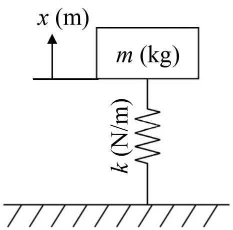
$\omega_n = \sqrt{k/m}$
：固有角周波数 (rad/s)

運動方程式の解は、

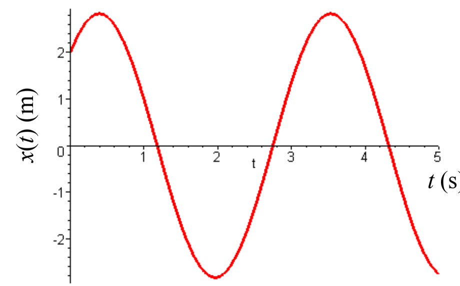
例題：
下図のバネーマス系の運動方程式を求めよ。また、以下の条件下でその方程式を解け。

$m = 1kg,\ k = 4\,N/m$
$x(0) = 2m,\ dx(0)/dt = 4\,m/s$

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx \Rightarrow \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -4x$$



$$x(t) = 2\sqrt{2}\cos(2t - \pi/4)$$



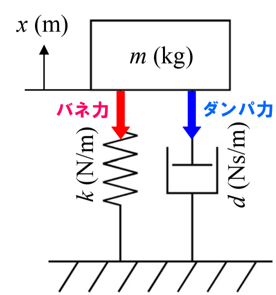
本日の授業内容

1．ニュートンの法則の復習

2．バネーマス系のモデリング

3．バネーマスーダンパ系のモデリング

バネーマスーダンパ系



運動方程式

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \underbrace{-kx(t)}_{バネ力} \underbrace{- d\frac{dx(t)}{dt}}_{ダンパ力}$$

$$m > 0,\ k > 0,\ d > 0$$

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + d\frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = 0$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{d}{m}\frac{dx(t)}{dt} + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\frac{d}{m}\frac{dx(t)}{dt}+\frac{k}{m}x=0$$

$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}$ ：固有角周波数 (rad/s)

$\varsigma=\frac{d}{d_c}=\frac{d}{2\sqrt{mk}}$ ：減衰比（無次元量）

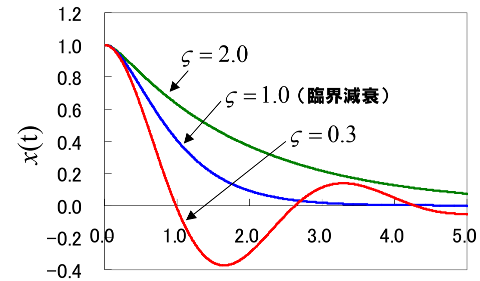
$d_c=2\sqrt{mk}$ ：臨界粘性減衰係数

どのように
減衰するかは
このパラメータで
決まる！

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+2\varsigma\omega_n\frac{dx(t)}{dt}+\omega_n^2x=0$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+2\varsigma\omega_n\frac{dx(t)}{dt}+\omega_n^2x=0$$

$\omega_n=2.0$
$x(0)=1.0$
$dx(0)/dt=0.0$



バネーマスーダンパ系の運動方程式を解く

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+2\varsigma\omega_n\frac{dx(t)}{dt}+\omega_n^2x=0$$

$$\omega_n>0,\ \varsigma>0$$

$$\lambda^2+2\varsigma\omega_n\lambda+\omega_n^2=0$$

$$\lambda=\boxed{}$$

（i）$\varsigma^2-1>0$ のとき　$(\varsigma>1)$

特性方程式の解

$$\lambda=-\varsigma\omega_n\pm\sqrt{\varsigma^2-1}\cdot\omega_n$$
$$=\left(-\varsigma\pm\sqrt{\varsigma^2-1}\right)\omega_n$$

（異なる実数解）

$$x(t)=A\cdot\exp\left((-\varsigma+\sqrt{\varsigma^2-1})\omega_nt\right)+B\cdot\exp\left((-\varsigma-\sqrt{\varsigma^2-1})\omega_nt\right)$$

（ii）$\varsigma^2 - 1 = 0$ のとき $(\varsigma = 1)$

特性方程式の解

$$\lambda = -\varsigma\omega_n \pm \sqrt{\varsigma^2 - 1} \cdot \omega_n$$

$$= -\varsigma\omega_n \quad \text{（重解）}$$

$$\boxed{x(t) = A \cdot \exp(-\varsigma\omega_n t) + B \cdot t \cdot \exp(-\varsigma\omega_n t)}$$

（iii）$\varsigma^2 - 1 < 0$ のとき $(\varsigma < 1)$

特性方程式の解

$$\lambda = -\varsigma\omega_n \pm \sqrt{\varsigma^2 - 1} \cdot \omega_n$$

$$= -\varsigma\omega_n \pm j\sqrt{1 - \varsigma^2} \cdot \omega_n$$

（共役複素解）

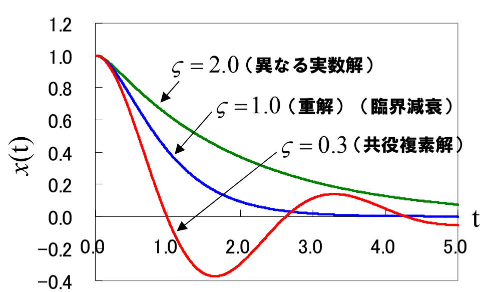
$$\boxed{x(t) = \exp(-\varsigma\omega_n t) \cdot \left\{A\cos\left(\sqrt{1-\varsigma^2} \cdot \omega_n t\right) + B\sin\left(\sqrt{1-\varsigma^2} \cdot \omega_n t\right)\right\}}$$

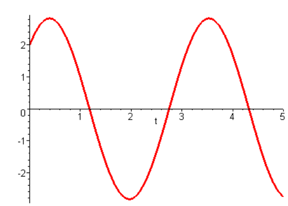
$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\varsigma\omega_n\frac{dx(t)}{dt} + \omega_n^2 x = 0$$

$\omega_n = 2.0$

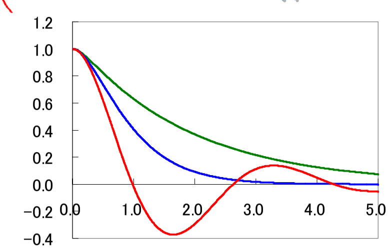
$x(0) = 1.0$

$dx(0)/dt = 0.0$





バネ－マス系



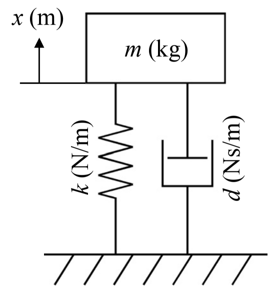
バネ－マス－ダンパ系

練習問題

図に示すバネーマスーダンパ系の運動方程式を求めよ。

ただし、質量m=2kg、バネ定数k=8N/mとし、
ダンパ定数dは4、8、16Ns/mの３通りの場合を考えよ。

また、初期条件は$x(0)$=1.0、$dx(0)/dt$=0.0とする。



答え

(i) d=4の場合

$$x(t) = \exp(-t)\cdot\left\{\cos(\sqrt{3}t) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t)\right\}$$

$$x(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\exp(-t)\cdot\cos(\sqrt{3}t - \frac{\pi}{6})$$ こちらの表記を用いる

(ii) d=8の場合

$$x(t) = (1+2t)\cdot\exp(-2t)$$

(iii) d=16の場合

$$x(t) = \frac{3+2\sqrt{3}}{6}\cdot\exp\left(2(-2+\sqrt{3})t\right) + \frac{3-2\sqrt{3}}{6}\cdot\exp\left(2(-2-\sqrt{3})t\right)$$

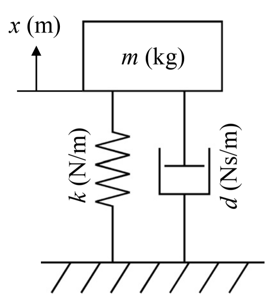
問題１：
図に示すバネーマスーダンパ系の運動方程式を示せ。
また、その運動方程式を解き、マスの変位 $x(t)$ を求めよ。
ただし、物理パラメータと初期条件は、以下のように設定せよ。

質量　$m = 5$kg

バネ定数　$k = 45$N/m

ダンパ定数　$d = 20$Ns/m

$x(0)$=1.0m、$dx(0)/dt$=0.0m/s



ニュートンの運動方程式から、図のバネーマスーダンパ系の運動方程式は、次式となる。

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t) - d\frac{dx(t)}{dt} \quad \cdots(1)$$

与えられた物理パラメータを式（１）に代入し、整理すると、

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 4\frac{dx(t)}{dt} + 9x(t) = 0 \quad \cdots(2)$$

式（２）の微分方程式の特性方程式は、

$$\lambda^2 + 4\lambda + 9 = 0 \quad \cdots(3)$$

となり、この方程式の解は、 $\lambda = -2 \pm j\sqrt{5}$ である。

したがって、式（２）の微分方程式の解は、

$$x(t) = \exp(-2t)\cdot\left\{A\cos(\sqrt{5}t) + B\sin(\sqrt{5}t)\right\} \quad \cdots(4)$$

ただし、AとBは任意定数である。

式（４）を微分すると、

$$\frac{dx(t)}{dt} = \exp(-2t)\cdot\left\{\left(-2A+\sqrt{5}B\right)\cos(\sqrt{5}t)+\left(-2B-\boxed{\sqrt{5}A}\right)\sin(\sqrt{5}t)\right\} \quad \cdots（５）$$

初期条件 $x(0)$=1.0m と $dx(0)/dt$=0.0m/s を式（４）と式（５）に代入すると、

$$x(0) = A = 1 \quad \cdots（６）$$

$$\frac{dx(0)}{dt} = -2A+\sqrt{5}B = 0 \quad \cdots（７）$$

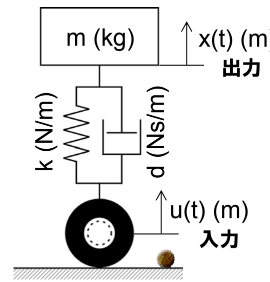
式（６）と式（７）から、 $A=1,\ B=\frac{2}{\sqrt{5}}$

AとBを式（４）に代入すると、変位 $x(t)$ が次式のように得られる。

$$x(t) = \exp(-2t)\cdot\left\{\cos(\sqrt{5}t)+\frac{2}{\sqrt{5}}\sin(\sqrt{5}t)\right\}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{5}}\exp(-2t)\cdot\cos\left(\sqrt{5}t-\tan^{-1}\left(2/\sqrt{5}\right)\right)$$

サスペンションをモデリングすると？



$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t) - d\frac{dx(t)}{dt}$$

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -k(x(t)-u(t)) - d\left(\frac{dx(t)}{dt}-\frac{du(t)}{dt}\right)$$

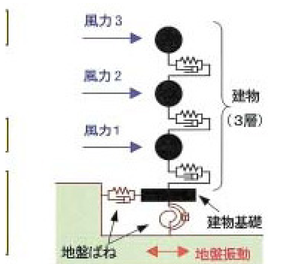


図-2　検証モデル
三階建て建物の常時微動計測記録を模擬した振動応答データを用いて、地盤一建物系振動モデルの振動特性を同定することにより、提案手法を検証した。

©財団法人　電力中央研究所