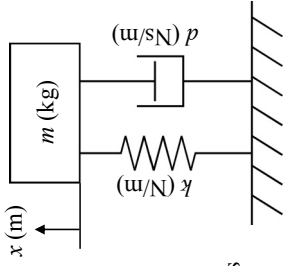


問題 1 :
 図に示すバネマスダンパ系の運動方程式を示せ。
 また、その運動方程式を解き、マスの変位 $x(t)$ を求めよ。
 ただし、物理パラメータと初期条件は、以下のように設定せよ。



質量 $m = 2.0 \text{ kg}$

バネ定数 $k = 10 \text{ N/m}$

ダンパ定数 $d = 4.0 \text{ Ns/m}$

$x(0) = 0.1 \text{ m}$, $dx(0)/dt = 0.1 \text{ m/s}$

ニュートンの運動方程式から、図のバネマスダンパ系の運動方程式は、次式となる。

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -kx(t) - d \frac{dx(t)}{dt} \quad \dots (1)$$

与えられた物理パラメータを式 (1) に代入し、整理すると、

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2 \frac{dx(t)}{dt} + 5x(t) = 0 \quad \dots (2)$$

式 (2) の微分方程式の特性方程式は、

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \quad \dots (3)$$

となり、この方程式の解は、 $\lambda = -1 \pm j2$ である。

したがって、式 (2) の微分方程式の解は、

$$x(t) = \exp(-t) \cdot \{A \cos(2t) + B \sin(2t)\} \quad \dots (4)$$

ただし、 A と B は任意定数である。

式 (4) を微分すると、

$$\frac{dx(t)}{dt} = \exp(-t) \cdot \{(2B - A) \cos(2t) - (2A + B) \sin(2t)\} \quad \dots (5)$$

初期条件 $x(0) = 0.1 \text{ m}$ と $dx(0)/dt = 0.1 \text{ m/s}$ を式 (4) と式 (5) に代入すると、

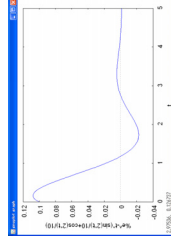
$$x(0) = A = 0.1 \quad \dots (6)$$

$$\frac{dx(0)}{dt} = 2B - A = 0.1 \quad \dots (7)$$

式 (6) と式 (7) から、 $A = 0.1$, $B = 0.1$

A と B を式 (4) に代入すると、変位 $x(t)$ が次式のように得られる。

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp(-t) \cdot \{0.1 \cos(2t) + 0.1 \sin(2t)\} \\ &= 0.1\sqrt{2} \cdot \exp(-t) \cdot \cos(2t - \pi/4) \end{aligned}$$



下図の運動方程式を導出せよ。

