システムダイナミックス

第１０回
ブロック線図
＆
電気系と機械系の結合
（直流モータの伝達関数）

本日の授業内容

Ａ．ブロック線図

１．ブロック線図の構成要素

２．ブロック線図の等価変換

Ｂ．電気系と機械系の結合

１．回転運動の復習

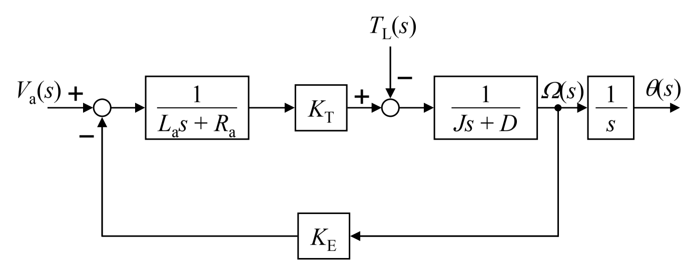
２．直流モータのモデル

Ｃ．付録

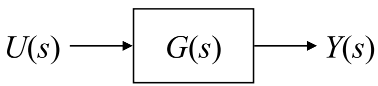
１．伝達関数でダイナミクスを表現する理由

２．制御理論のことを少し

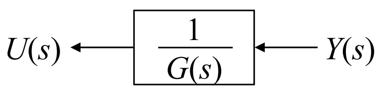
ブロック線図の例：
直流モータのダイナミクスをブロック線図で表すと・・・



伝達関数

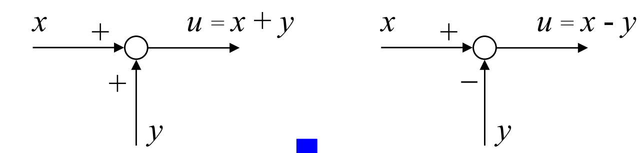


$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

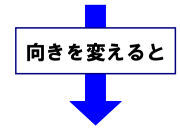


$$U(s) = \frac{1}{G(s)} \cdot Y(s)$$

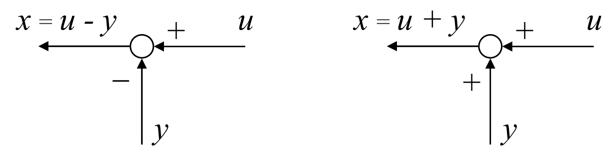
加え合わせ点



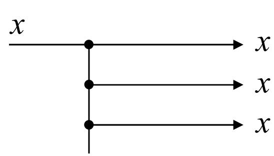
$u = x + y$
$x = u - y$



$u = x - y$
$x = u + y$



引き出し点



本日の授業内容

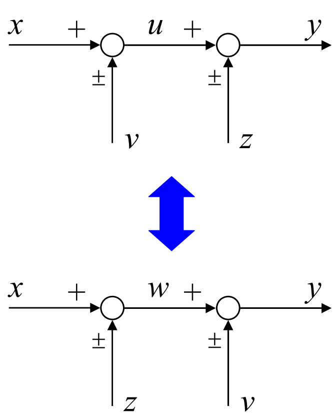
Ａ．ブロック線図

- １．ブロック線図の構成要素
- **２．ブロック線図の等価変換**

Ｂ．電気系と機械系の結合

- １．回転運動の復習
- ２．直流モータのモデル

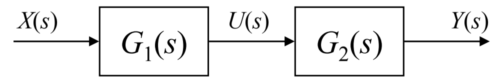
（１）加え合わせ点の交換



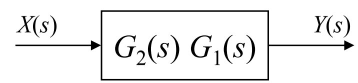
$$u = x \pm v$$
$$\begin{aligned} y &= u \pm z \\ &= x \pm v \pm z \end{aligned}$$

$$w = x \pm z$$
$$\begin{aligned} y &= w \pm v \\ &= x \pm z \pm v \end{aligned}$$

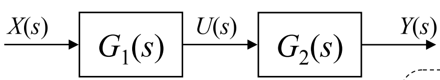
（２）直列結合



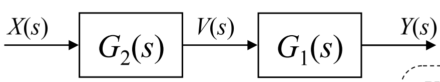
$$U(s) = G_1(s)X(s)$$
$$\begin{aligned} Y(s) &= G_2(s)U(s) \\ &= G_2(s)G_1(s)X(s) \end{aligned}$$



（３）伝達関数の交換

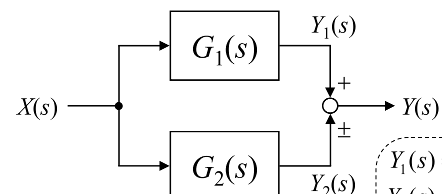


$$U(s) = G_1(s)X(s)$$
$$\begin{aligned} Y(s) &= G_2(s)U(s) \\ &= G_2(s)G_1(s)X(s) \end{aligned}$$

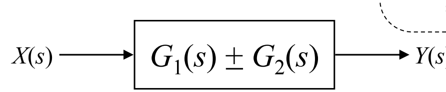


$$V(s) = G_2(s)X(s)$$
$$\begin{aligned} Y(s) &= G_1(s)V(s) \\ &= G_1(s)G_2(s)X(s) \end{aligned}$$

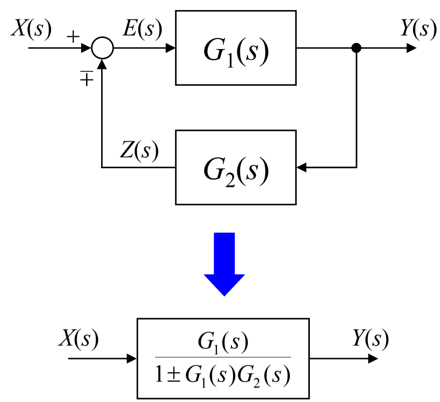
（４）並列結合

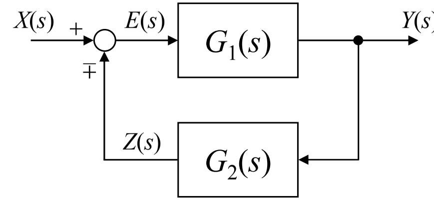


$$Y_1(s) = G_1(s)X(s)$$
$$Y_2(s) = G_2(s)X(s)$$
$$\begin{aligned} Y(s) &= Y_1(s) \pm Y_2(s) \\ &= G_1(s)X(s) \pm G_2(s)X(s) \\ &= (G_1(s) \pm G_2(s))X(s) \end{aligned}$$



（５）フィードバック結合





$$Y(s) = G_1(s)E(s)$$
$$Z(s) = G_2(s)Y(s)$$
$$E(s) = X(s) \mp Z(s)$$

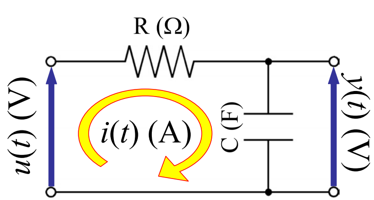
$E(s) =$

$Y(s) =$

$=$

$$\therefore Y(s) = \frac{G_1(s)}{1 \pm G_1(s)G_2(s)} X(s)$$

例えば、

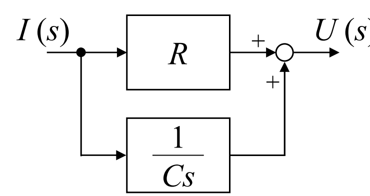


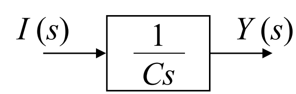
キルヒホッフの電圧の法則

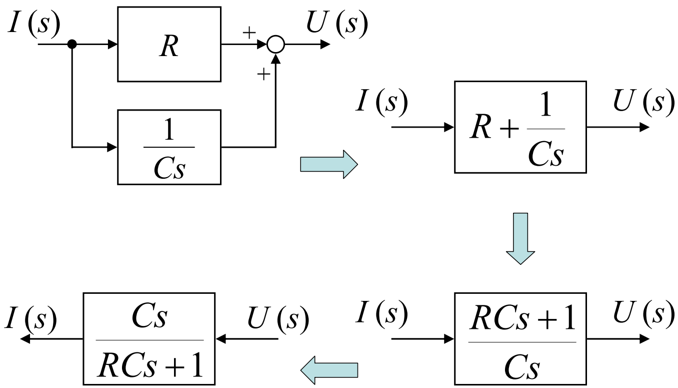
$$Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt = u(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

ラプラス変換

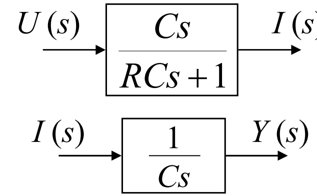


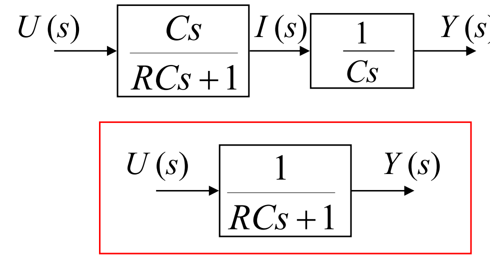




$$RI(s)+\frac{1}{Cs}I(s)=U(s)$$

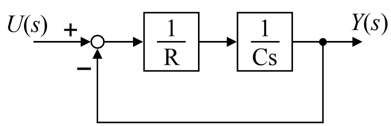
$$Y(s)=\frac{1}{Cs}I(s)$$



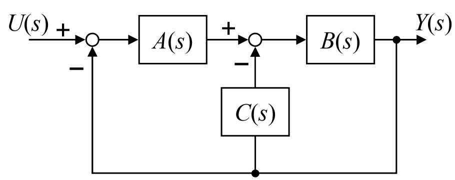


練習問題：ブロック線図の等価変換を用いて、以下のシステムの伝達関数を求めよ。

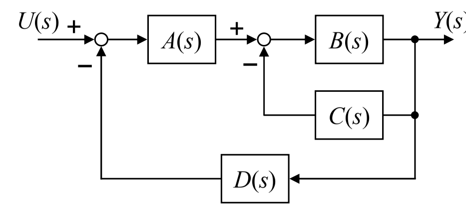
（１）



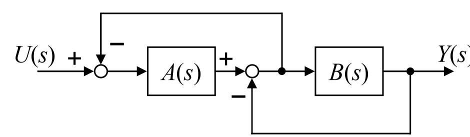
（２）



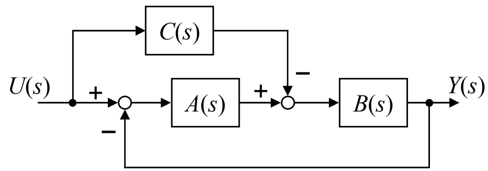
（３）



（４）

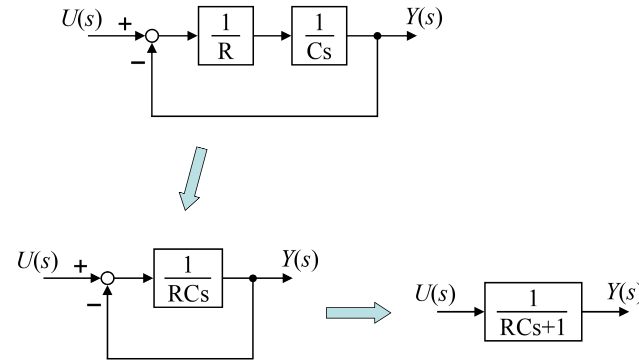


（５）

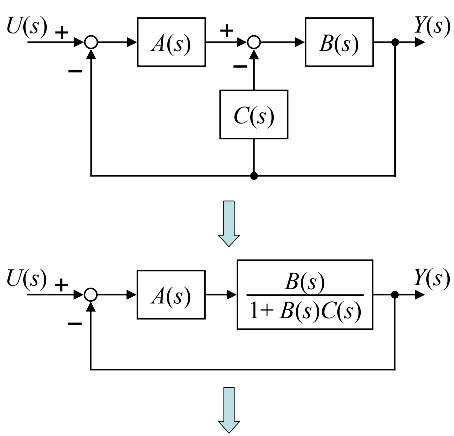

C(s)
U(s)
+
A(s)
+
−
B(s)
Y(s)
−

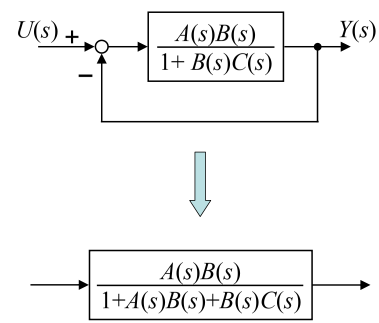
解答：

（１）

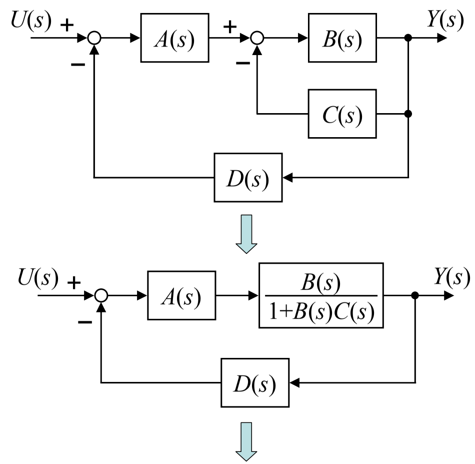

U(s)
+
−
1/R
1/Cs
Y(s)
U(s)
+
−
1/RCs
Y(s)
U(s)
1/(RCs+1)
Y(s)

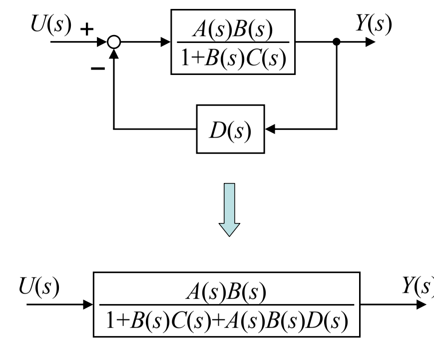
（２）


U(s)
+
−
A(s)
+
−
B(s)
Y(s)
C(s)
U(s)
+
−
A(s)
B(s)/(1+ B(s)C(s))
Y(s)

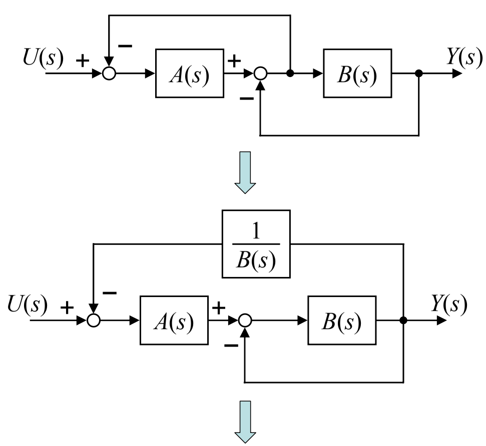

U(s)
+
−
A(s)B(s)/(1+ B(s)C(s))
Y(s)
A(s)B(s)/(1+A(s)B(s)+B(s)C(s))

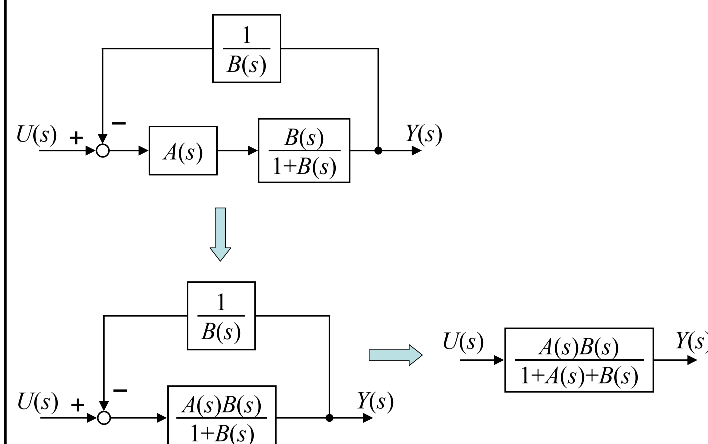
（３）


U(s)
+
−
A(s)
+
−
B(s)
Y(s)
C(s)
D(s)
U(s)
+
−
A(s)
B(s) / 1+B(s)C(s)
Y(s)
D(s)

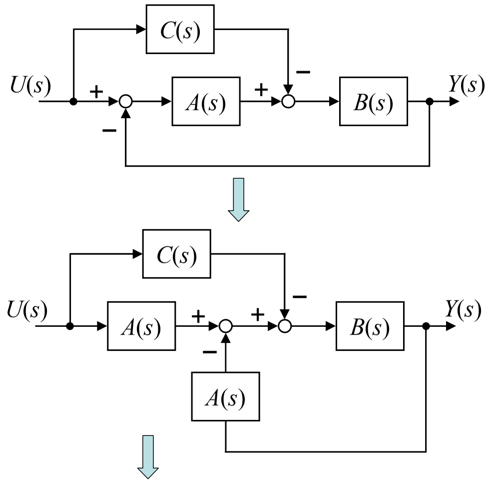

U(s)
+
−
A(s)B(s) / 1+B(s)C(s)
Y(s)
D(s)
U(s)
A(s)B(s) / 1+B(s)C(s)+A(s)B(s)D(s)
Y(s)

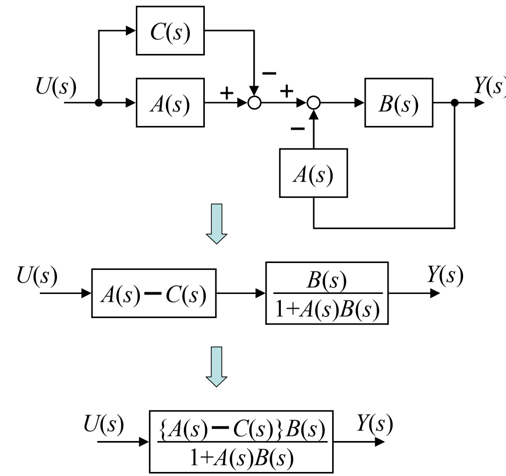
（４）


U(s)
+
−
A(s)
+
−
B(s)
Y(s)
1 / B(s)
U(s)
+
−
A(s)
+
−
B(s)
Y(s)


1 / B(s)
U(s)
+
−
A(s)
B(s) / 1+B(s)
Y(s)
1 / B(s)
U(s)
+
−
A(s)B(s) / 1+B(s)
Y(s)
U(s)
A(s)B(s) / 1+A(s)+B(s)
Y(s)

（５）





本日の授業内容

A．ブロック線図

1．ブロック線図の構成要素

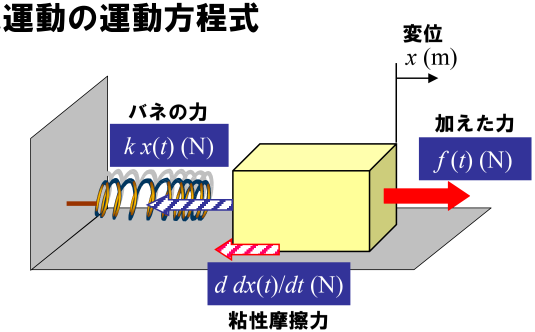
2．ブロック線図の等価変換

B．電気系と機械系の結合

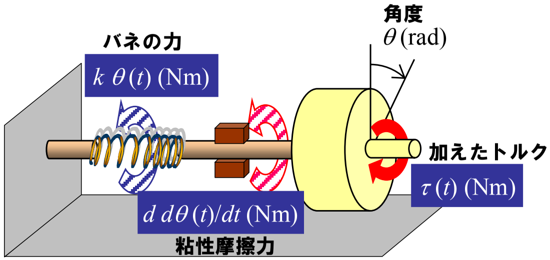
1．回転運動の復習

2．直流モータのモデル

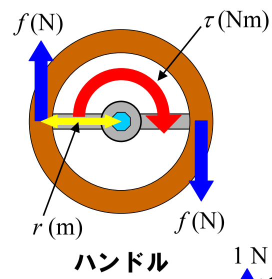
並進運動の運動方程式



回転運動の運動方程式



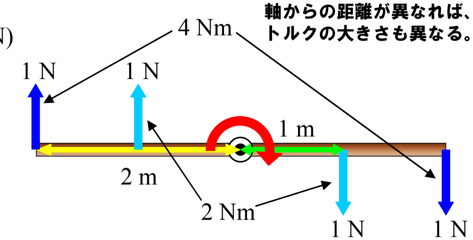
トルクとは？



簡単に言うと
回転力のこと

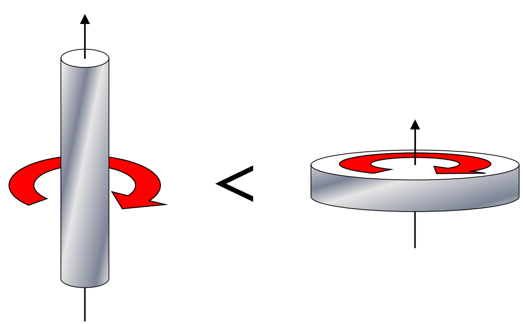
$$\tau = f \times r + f \times r$$
$$= 2 f r \ (\mathrm{Nm})$$

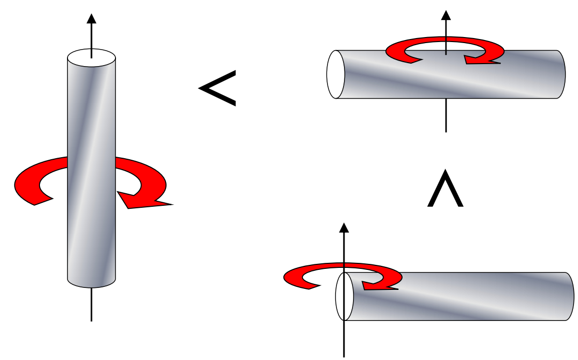
力の大きさが同じでも、
軸からの距離が異なれば、
トルクの大きさも異なる。



慣性モーメントとは？

回転運動における剛体の慣性の大きさを表す量。
質量が回転軸から遠くに分布しているほど大きい。





同じ物体でも、回転軸によって慣性モーメントは変わる。

並進運動と回転運動の対応

並進運動		回転運動	
変位	x (m)	**角度**	θ (rad)
速度	v (m/s)	**角速度**	ω (rad/s)
加速度	dv/dt (m/s^2)	**角加速度**	$d\omega/dt$ (rad/s^2)
力	f (N)	**トルク**	τ (Nm)
質量	m (kg)	**慣性モーメント**	I (kgm^2)
バネ定数	k (N/m)	**バネ定数**	k (Nm/rad)
ダンパ定数	d (Ns/m)	**ダンパ定数**	d (Nms/rad)

（質量）×（加速度）＝（力）

（慣性モーメント）×（角加速度）＝（トルク）

本日の授業内容

A．ブロック線図

1．ブロック線図の構成要素

2．ブロック線図の等価変換

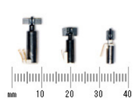
B．電気系と機械系の結合

1．回転運動の復習

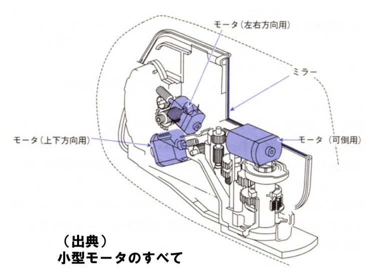
2．直流モータのモデル

直流（ＤＣ）モータ

© MABUCHI MOTOR



© (株)シコー技研

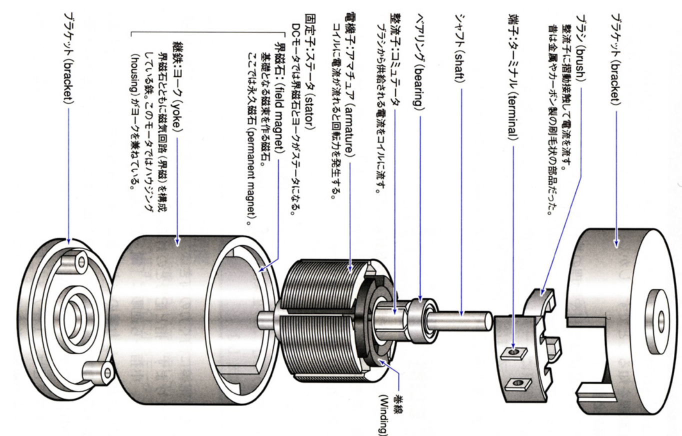


（出典）
小型モータのすべて

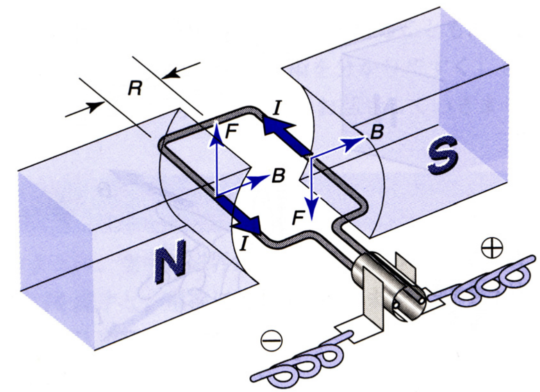
**日本では、発電される電力の
半分以上がモータに使われている！**

見城、佐渡、「小型モータのすべて」、技術評論社、p.14

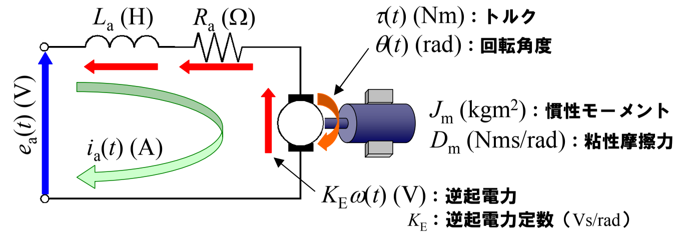
直流モータの構造



直流モータの回転原理



直流モータのモデル



電気系（キルヒホッフ）：

$$L_a\frac{di_a(t)}{dt}+R_ai_a(t)+K_E\omega_m(t)=e_a(t)$$

$$\tau_m(t)=K_Ti_a(t)$$

K_T：トルク定数（Nm/A）

機械系（運動方程式）：

$$J_m\frac{d\omega_m(t)}{dt}+D_m\omega_m(t)=\tau_m(t)$$

$$\omega_m(t)=\frac{d\theta_m(t)}{dt}$$

$$L_a\frac{di_a(t)}{dt}+R_ai_a(t)+K_E\omega_m(t)=e_a(t) \quad （１）$$

$$J_m\frac{d\omega_m(t)}{dt}+D_m\omega_m(t)=\tau_m(t) \quad （２）$$

$$\tau_m(t)=K_Ti_a(t) \quad （３） \qquad \omega_m(t)=\frac{d\theta_m(t)}{dt} \quad （４）$$

式（１）より、

$$L_asI_a(s)+R_aI_a(s)+K_E\Omega_m(s)=E_a(s)$$

$$I_a(s)=\frac{1}{L_as+R_a}\{E_a(s)-K_E\Omega_m(s)\} \quad （５）$$

式（２）より、

$$J_ms\Omega_m(s)+D_m\Omega_m(s)=T_m(s)$$

$$\Omega_m(s)=\frac{1}{J_ms+D_m}T_m(s) \quad （６）$$

式（３）より、

$$T_m(s)=K_TI_a(s) \quad （７）$$

式（４）より、

$$\Omega_m(s)=s\Theta_m(s)$$

$$\Theta_m(s)=\frac{1}{s}\Omega_m(s) \quad （８）$$

$$I_a(s)=\frac{1}{L_as+R_a}\{E_a(s)-K_E\Omega_m(s)\} \quad （５） \qquad T_m(s)=K_TI_a(s) \quad （７）$$

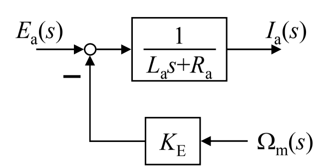


図１

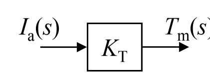


図３

$$\Omega_m(s)=\frac{1}{J_ms+D_m}T_m(s) \quad （６） \qquad \Theta_m(s)=\frac{1}{s}\Omega_m(s) \quad （８）$$

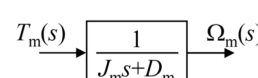


図２

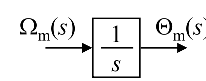
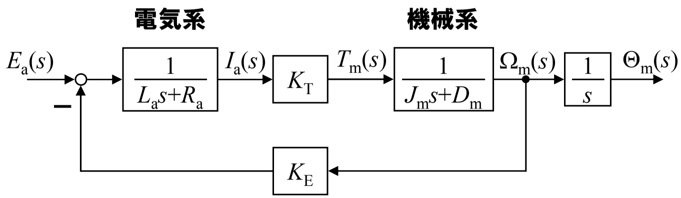
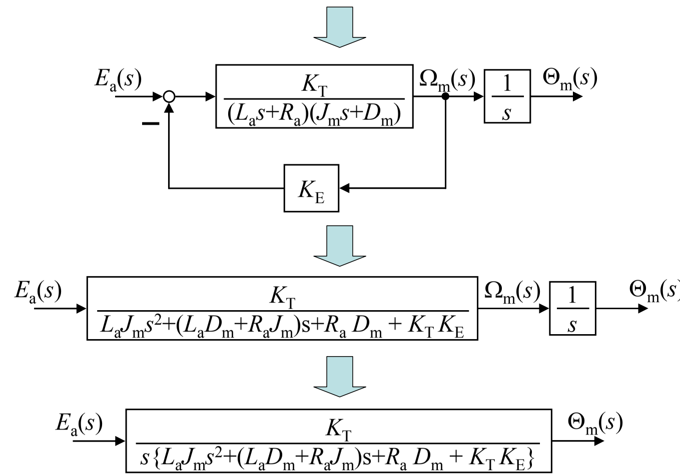


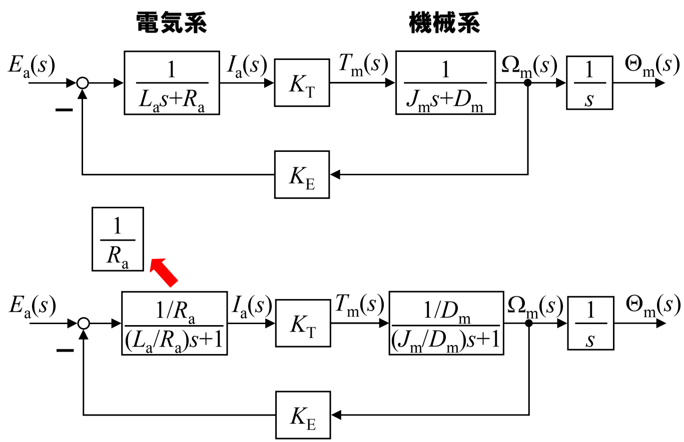
図４

図１～図４より、

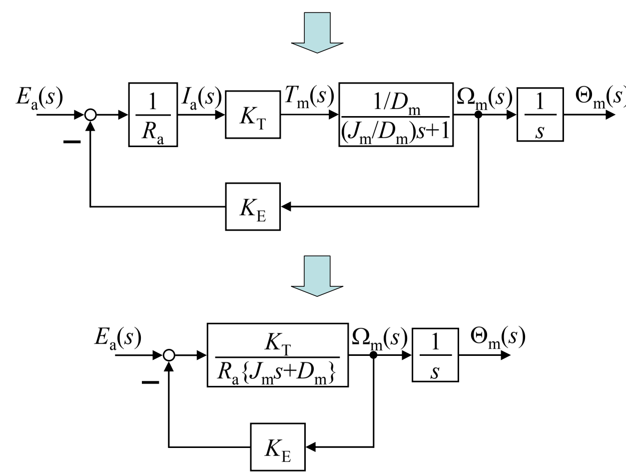


直流モータのブロック線図





時定数の比較： $T_a=L_a/R_a \ll T_m=J_m/D_m$



$$E_a(s) \rightarrow \boxed{\frac{K_T}{R_a\{J_m s + D_m\} + K_T K_E}} \xrightarrow{\Omega_m(s)} \boxed{\frac{1}{s}} \rightarrow \Theta_m(s)$$

$$E_a(s) \rightarrow \boxed{\frac{K_T}{s\{R_a J_m s + R_a D_m + K_T K_E\}}} \rightarrow \Theta_m(s)$$

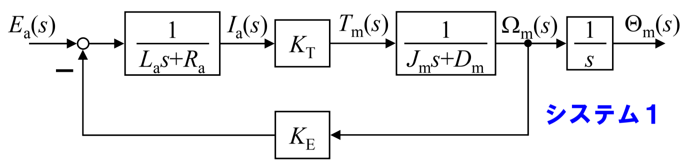
近似前

$$E_a(s) \rightarrow \boxed{\frac{K_T}{s\{L_a J_m s^2 + (L_a D_m + R_a J_m)s + R_a D_m + K_T K_E\}}} \rightarrow \Theta_m(s)$$

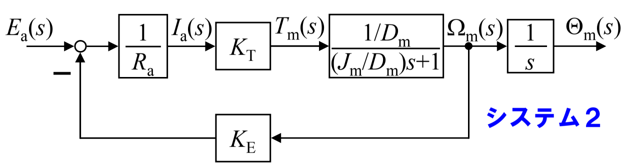
近似後

$$E_a(s) \rightarrow \boxed{\frac{K_T}{s\{R_a J_m s + R_a D_m + K_T K_E\}}} \rightarrow \Theta_m(s)$$

ステップ応答の計算例



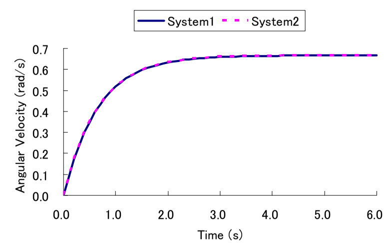
システム１



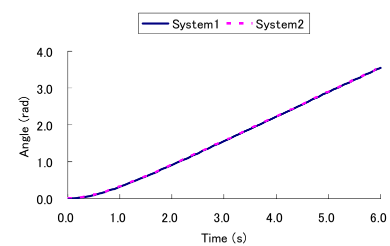
システム２

$J_m = 1.0, D_m = 0.5,$
$L_a = 0.001, R_a = 1.0,$
$K_T = 1.0, K_E = 1.0$

（注意）
L_a が極端に小さいということだけ注意。
その他に深い意味はない。



ほとんど同じ？



C．付録

1．伝達関数でダイナミクスを表現する理由

2．制御理論のことを少し

Q：伝達関数とは何を表しているのか？

A：システムのダイナミクスを表現している。

例えば

バネーマスーダンパ系の運動方程式：

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}+d\frac{dx(t)}{dt}+kx(t)=f(t)$$ t 領域

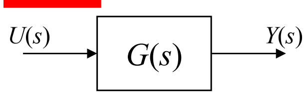
バネーマスーダンパ系の伝達関数：

$$G(s)=\frac{X(s)}{F(s)}=\frac{1}{ms^2+ds+k}$$ s 領域

どちらもバネーマスーダンパ系の
ダイナミクスを表現している！

伝達関数でダイナミクスを表現する理由

s 領域



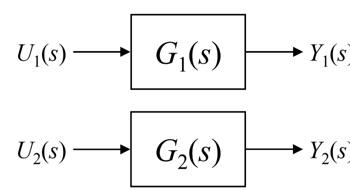
$$Y(s)=G(s)\cdot U(s)$$

システムのダイナミクス
（入出力関係）

t 領域

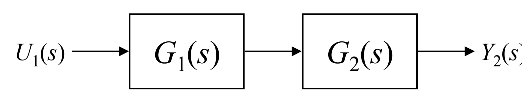
畳み込み積分

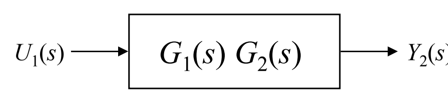
$$y(t)=\int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau$$
$$=\int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau$$



$$Y_1(s)=G_1(s)\cdot U_1(s)$$

$$Y_2(s)=G_2(s)\cdot U_2(s)$$





$$Y_2(s)=G_2(s)\cdot G_1(s)\cdot U_1(s)$$

t 領域で考えた場合

$$y_1(t)=\int_0^t g_1(t-\tau)u_1(\tau)d\tau$$

$$y_2(t)=\int_0^t g_2(t-\tau)u_2(\tau)d\tau$$

$$u_2(t)=y_1(t)$$

$$\boxed{y_2(t)=\int_0^t g_2(t-\tau)\left\{\int_0^\tau g_1(\tau-\upsilon)u_1(\upsilon)d\upsilon\right\}d\tau}$$

$$\because y_1(\tau)=\int_0^\tau g_1(\tau-\upsilon)u_1(\upsilon)d\upsilon$$

どちらが簡単？
しかし、・・・

C．付録

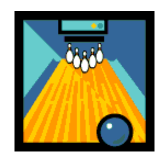
1．伝達関数でダイナミクスを表現する理由

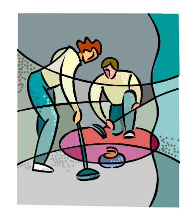
2．制御理論のことを少し

制御とは？

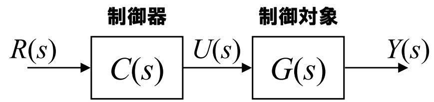
“制御とは、対象をそのままに放置すれば、
それぞれのルールにしたがって変化する
ところを、われわれが積極的に働きかける
ことによって、われわれの意図するよう
に対象の動きを変化させることである。”

例えば・・・

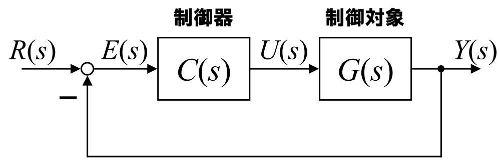




フィードフォワード制御とフィードバック制御



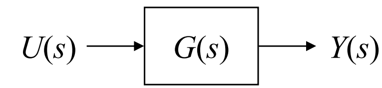
フィードフォワード制御



フィードバック制御

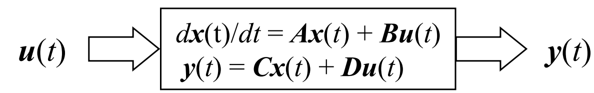
古典制御理論：
伝達関数 $G(s)$ や周波数伝達関数 $G(j\omega)$
に基づいて、制御器を設計する。

s 領域
周波数領域



現代制御理論：
状態方程式 $dx(t)/dt = \boldsymbol{A}x(t) + \boldsymbol{B}u(t)$
に基づいて、制御器を設計する。

t 領域



最適制御

古典制御理論と現代制御理論

古典制御理論の成立：１９４０年代の後半

現代制御理論の成立：１９５０～６０年代

参考文献

見城尚志、佐渡友茂、「小型モータのすべて」、技術評論社
示村悦二郎、「自動制御とは何か」、コロナ社