システムダイナミックス

第６回　線形システムと非線形システム

本日の授業内容

1．線形性とは？

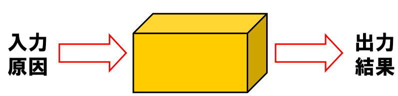
2．線形システムと非線形システム

3．バネーマスーダンパ系は線形システム？

4．タンクシステムは線形システム？

5．非線形システムの線形化

線形性とは？



a → A

b → B

のとき

α a → α A

β b → β B

a＋b → A＋B

α a＋β b → α A＋β B

重ね合わせの原理

線形関数

$y = f(x)$

$x \rightarrow \boxed{f(\bullet)} \rightarrow y$

$x_1 \rightarrow y_1$

$x_2 \rightarrow y_2$

⇒ $\alpha x_1 + \beta x_2 \rightarrow \alpha y_1 + \beta y_2$

重ね合わせの原理が
成り立つ関数

例題：次の３つの関数は線形か？

（１） $y = ax$

（２） $y = ax^2$

（３） $y = ax + b$

重ね合わせの原理が成り立つかどうか調べる！

（１）$y = ax$

$$x_1 \Rightarrow y_1 = ax_1$$
$$x_2 \Rightarrow y_2 = ax_2$$

$$a(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha a x_1 + \beta a x_2$$
$$\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha a x_1 + \beta a x_2$$

$$\therefore \alpha y_1 + \beta y_2 = a(\alpha x_1 + \beta x_2)$$

⇨ $y = ax$ **は線形関数**

（２）$y = ax^2$

$$x_1 \Rightarrow y_1 = ax_1^2$$
$$x_2 \Rightarrow y_2 = ax_2^2$$

$$a(\alpha x_1 + \beta x_2)^2 = \alpha^2 a x_1^2 + \beta^2 a x_2^2 + 2\alpha\beta a x_1 x_2$$
$$\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha a x_1^2 + \beta a x_2^2$$

$$\therefore \alpha y_1 + \beta y_2 \neq a(\alpha x_1 + \beta x_2)^2$$

⇨ $y = ax^2$ **は非線形関数**

（３）$y = ax + b$

$$x_1 \Rightarrow y_1 = ax_1 + b$$
$$x_2 \Rightarrow y_2 = ax_2 + b$$

$$a(\alpha x_1 + \beta x_2) + b = \alpha a x_1 + \beta a x_2 + b$$
$$\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha(ax_1 + b) + \beta(ax_2 + b)$$
$$= \alpha a x_1 + \beta a x_2 + (\alpha + \beta)b$$

$$\therefore \alpha y_1 + \beta y_2 \neq a(\alpha x_1 + \beta x_2) + b$$

⇨ $y = ax + b$ **は非線形関数** ⇨ **座標変換で線形関数にできる。**

線形写像

R^2からR^2への写像Tが次の性質を満たすとき、
線形写像という。

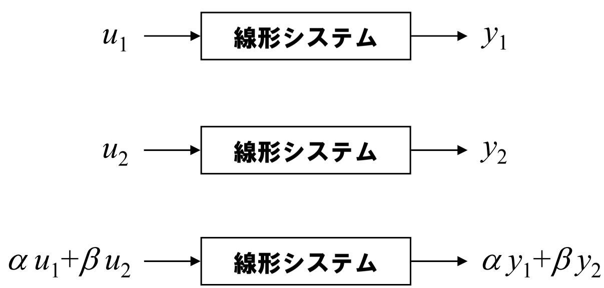
（１）$T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = T(\boldsymbol{x})+T(\boldsymbol{y})$
（２）$T(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha T(\boldsymbol{x})$

重ね合わせの原理が成り立つ写像

本日の授業内容

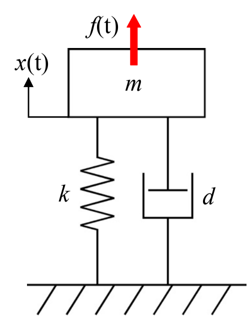
1．線形性とは？
2．線形システムと非線形システム
3．バネーマスーダンパ系は線形システム？
4．タンクシステムは線形システム？
5．非線形システムの線形化

線形システムと非線形システム



非線形システム：線形システムではないシステム

理想的なバネーマスーダンパ系は線形システムか？



バネーマスーダンパ系

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}+d\frac{dx(t)}{dt}+kx(t)=f(t)$$

重ね合わせの原理が
成り立つか調べる！

入力　　**出力**

$f_1(t) \Rightarrow x_1(t)$　　$m\dfrac{d^2x_1(t)}{dt^2}+d\dfrac{dx_1(t)}{dt}+kx_1(t)=f_1(t)$　（１）

$f_2(t) \Rightarrow x_2(t)$　　$m\dfrac{d^2x_2(t)}{dt^2}+d\dfrac{dx_2(t)}{dt}+kx_2(t)=f_2(t)$　（２）

式（１）と式（２）から、$\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)$ を計算すると、

$$\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)=\alpha\cdot\left\{m\frac{d^2x_1(t)}{dt^2}+d\frac{dx_1(t)}{dt}+kx_1(t)\right\}+\beta\cdot\left\{m\frac{d^2x_2(t)}{dt^2}+d\frac{dx_2(t)}{dt}+kx_2(t)\right\}$$

$$\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)=\left\{m\frac{d^2(\alpha x_1(t))}{dt^2}+d\frac{d(\alpha x_1(t))}{dt}+k(\alpha x_1(t))\right\}$$
$$+\left\{m\frac{d^2(\beta x_2(t))}{dt^2}+d\frac{d(\beta x_2(t))}{dt}+k(\beta x_2(t))\right\}$$
$$=m\frac{d^2\left(\boxed{\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)}\right)}{dt^2}+d\frac{d\left(\boxed{\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)}\right)}{dt}$$
$$+k\left(\boxed{\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)}\right)$$

入力　　**出力**

$f_1(t) \Rightarrow x_1(t)$

$f_2(t) \Rightarrow x_2(t)$

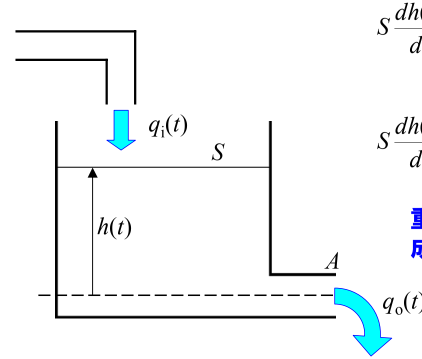
$\alpha f_1(t)+\beta f_2(t) \Rightarrow \alpha x_1(t)+\beta x_2(t)$

重ね合わせの原理が成り立つ ⇒ **線形システム**

本日の授業内容

1．線形性とは？
2．線形システムと非線形システム
3．バネーマスーダンパ系は線形システム？
4．**タンクシステムは線形システム？**
5．非線形システムの線形化

タンクシステムは線形システムか？



$$S\frac{dh(t)}{dt}=q_i(t)-A\sqrt{2gh(t)}$$

⇓

$$S\frac{dh(t)}{dt}+A\sqrt{2gh(t)}=q_i(t)$$

重ね合わせの原理が成り立つか調べる！

入力		出力		
$q_{i1}(t)$	⇒	$h_1(t)$	$S\dfrac{dh_1(t)}{dt}+A\sqrt{2gh_1(t)}=q_{i1}(t)$	（１）
$q_{i2}(t)$	⇒	$h_2(t)$	$S\dfrac{dh_2(t)}{dt}+A\sqrt{2gh_2(t)}=q_{i2}(t)$	（２）

式（１）と式（２）から、$\alpha q_{i1}(t)+\beta q_{i2}(t)$ を計算すると、

$$\alpha q_{i1}(t)+\beta q_{i2}(t)=\alpha\cdot\left\{S\frac{dh_1(t)}{dt}+A\sqrt{2gh_1(t)}\right\}+\beta\cdot\left\{S\frac{dh_2(t)}{dt}+A\sqrt{2gh_2(t)}\right\}$$

$$\begin{aligned}\alpha q_{i1}(t)+\beta q_{i2}(t)&=\left\{S\frac{d(\alpha h_1(t))}{dt}+\alpha A\sqrt{2gh_1(t)}\right\}\\&\quad+\left\{S\frac{d(\beta h_2(t))}{dt}+\beta A\sqrt{2gh_2(t)}\right\}\\&=S\frac{d(\alpha h_1(t)+\beta h_2(t))}{dt}+\alpha A\sqrt{2gh_1(t)}+\beta A\sqrt{2gh_2(t)}\\&=S\frac{d(\alpha h_1(t)+\beta h_2(t))}{dt}+\underline{A\sqrt{2g}\left(\alpha\sqrt{h_1(t)}+\beta\sqrt{h_2(t)}\right)}\end{aligned}$$

$$\not\parallel$$

$$\underline{A\sqrt{2g(\alpha h_1(t)+\beta h_2(t))}}$$

重ね合わせの原理が成り立たない ⇒ **非線形システム**

以下の３つのシステムは線形システムですか？
それとも非線形システムですか？

（１） $\dfrac{dx(t)}{dt}+ax(t)=\sin(t)$

（２） $\dfrac{dx(t)}{dt}+\sin(x(t))=u(t)$

（３） $\dfrac{dx(t)}{dt}+ax(t)=\sin(u(t))$

$x(t)$：出力
$u(t)$：入力

（１） $\dfrac{dx(t)}{dt}+ax(t)=\sin(t)$

入力$u(t)$が$\sin(t)$なだけ。
例えば、
$u_1(t)=\sin(t)$
$u_2(t)=\sin(2t)$
とすると、

$$\frac{dx_1(t)}{dt}+ax_1(t)=u_1(t)=\sin(t)$$
$$\frac{dx_2(t)}{dt}+ax_2(t)=u_2(t)=\sin(2t)$$

$$\begin{aligned}&\boxed{\alpha u_1(t)+\beta u_2(t)}\\&=\alpha\sin(t)+\beta\sin(2t)\\&=\alpha\left\{\frac{dx_1(t)}{dt}+ax_1(t)\right\}+\beta\left\{\frac{dx_2(t)}{dt}+ax_2(t)\right\}\\&=\frac{d\left(\boxed{\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)}\right)}{dt}+a\left(\boxed{\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)}\right)\end{aligned}$$

（２） $\dfrac{dx(t)}{dt}+\sin(x(t))=u(t)$

$$\frac{dx_1(t)}{dt}+\sin(x_1(t))=u_1(t)$$
$$\frac{dx_2(t)}{dt}+\sin(x_2(t))=u_2(t)$$

$$\begin{aligned}
&\alpha u_1(t)+\beta u_2(t)\\
&=\alpha\left\{\frac{dx_1(t)}{dt}+\sin(x_1(t))\right\}+\beta\left\{\frac{dx_2(t)}{dt}+\sin(x_2(t))\right\}\\
&=\frac{d(\alpha x_1(t)+\beta x_2(t))}{dt}+\alpha\sin(x_2(t))+\beta\sin(x_2(t))\\
&\neq\frac{d(\alpha x_1(t)+\beta x_2(t))}{dt}+\sin(\alpha x_1(t)+\beta x_2(t))
\end{aligned}$$

（３） $\dfrac{dx(t)}{dt}+ax(t)=\sin(u(t))$

$$\frac{dx_1(t)}{dt}+ax_1(t)=\sin(u_1(t))$$
$$\frac{dx_2(t)}{dt}+ax_2(t)=\sin(u_2(t))$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d(\alpha x_1(t)+\beta x_2(t))}{dt}+a(\alpha x_1(t)+\beta x_2(t))\\
&=\alpha\left\{\frac{dx_1(t)}{dt}+ax_1(t)\right\}+\beta\left\{\frac{dx_2(t)}{dt}+ax_2(t)\right\}\\
&=\alpha\sin(u_1(t))+\beta\sin(u_2(t))\\
&\neq\sin(\alpha u_1(t)+\beta u_2(t))
\end{aligned}$$

本日の授業内容

1．線形性とは？

2．線形システムと非線形システム

3．バネーマスーダンパ系は線形システム？

4．タンクシステムは線形システム？

5．非線形システムの線形化

線形化の方法

テイラー展開を用いて、
非線形項を１次多項式で近似する。

テイラー展開 ➡ 関数の多項式近似

関数 $f(x)$ のテイラー展開

$$f(x+\Delta x)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}\cdot\Delta x+\frac{f''(x)}{2!}\cdot\Delta x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\cdot\Delta x^n+\cdots$$

１次多項式近似：

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+\frac{f'(x)}{1!}\cdot\Delta x$$

２次多項式近似：

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+\frac{f'(x)}{1!}\cdot\Delta x+\frac{f''(x)}{2!}\cdot\Delta x^2$$

関数 $f(x)$ のテイラー展開

$$f(x+\Delta x)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}\cdot\Delta x+\frac{f''(x)}{2!}\cdot\Delta x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\cdot\Delta x^n+\cdots$$

基準点

基準点からの変位

基準点 x のまわりで展開

基準点 x が紛らわしければ、別の記号を用いても良い。

例えば、$x=x_s+\Delta x$（基準点＋基準点からの変位）とおくと、

$$f(x)=f(x_s+\Delta x)$$

基準点 x_s のまわりで展開

$$=f(x_s)+\frac{f'(x_s)}{1!}\cdot\Delta x+\frac{f''(x_s)}{2!}\cdot\Delta x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_s)}{n!}\cdot\Delta x^n+\cdots$$

（補足）基準点が０の場合は、マクローリン展開と呼ばれる。

例題：$f(x)=\sin(x)$ を２次の項までテイラー展開する。

$f'(x)=\cos(x)$　　$f''(x)=-\sin(x)$

$$\sin(x)=\sin(x_s+\Delta x)$$

$$\approx\sin(x_s)+\cos(x_s)\cdot\Delta x-\frac{1}{2}\sin(x_s)\cdot\Delta x^2$$

$\sin(x)$ の x_s まわりのテイラー展開（２次の項まで）

$x_s=0$ の時：

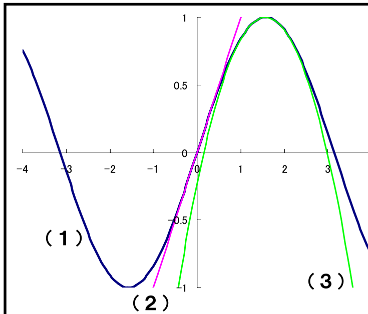
$$\sin(x)\approx\Delta x=x-x_s=x$$

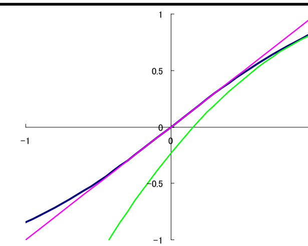
$x_s=\pi/2$ の時：

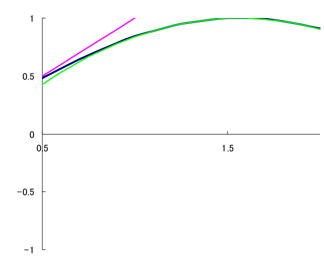
$$\sin(x)\approx1-\frac{1}{2}\Delta x^2=1-\frac{1}{2}(x-x_s)^2=1-\frac{1}{2}(x-\pi/2)^2$$

$$f(x)=f(x_s+\Delta x)\qquad\text{（テイラー展開）}$$

$$=f(x_s)+\frac{f'(x_s)}{1!}\cdot\Delta x+\frac{f''(x_s)}{2!}\cdot\Delta x^2+\cdots$$







（１） $\sin(x)$

（２） x （x_s=0 近傍で近似）

（３） $1-\frac{1}{2}(x-\pi/2)^2$ （x_s=π/2 近傍で近似）

タンクシステムの線形化

$$S\frac{dh(t)}{dt} = q_i(t) - \boxed{A\sqrt{2gh(t)}}$$

テイラー展開で
１次近似する

基準点
が必要

**流入量と流出量が等しく、
水位が変化しない状態を基準点とする。**

平衡状態（動作点）
流入量：q_{is}　水位：h_s

$$q_{iS} = A\sqrt{2gh_S}$$

（Ｃ）$f(x)=\sqrt{x}$

$f(x)$ の１階、２階微分はそれぞれ次式となる。

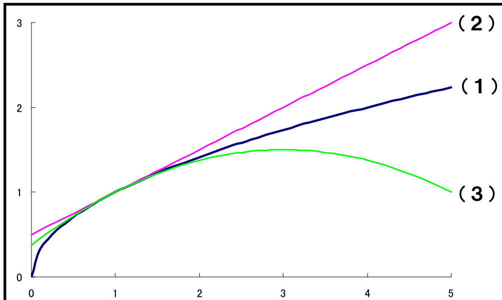
$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad f''(x)=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

したがって、$\sqrt{x}$ を２次の項までテイラー展開すると、
次のようになる。

$$\sqrt{x}=\sqrt{x_s+\Delta x}$$
$$\approx\sqrt{x_s}+\frac{1}{2\sqrt{x_s}}\Delta x-\frac{1}{8x_s\sqrt{x_s}}\Delta x^2$$

$x_s=1$ のまわりで展開した場合は、以下のようになる。

$$\sqrt{x}\approx 1+\frac{1}{2}\Delta x-\cancel{\frac{1}{8}\Delta x^2}$$
$$=1+\frac{1}{2}(x-1)-\cancel{\frac{1}{8}(x-1)^2}$$



（１）$\sqrt{x}$

（２）$1+\frac{1}{2}(x-1)$

（３）$1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2$

$$h(t)=h_s+\Delta h(t)$$
$$q_i(t)=q_{is}+\Delta q_i(t)$$
とおく

$$S\frac{d(h_s+\Delta h(t))}{dt}=(q_{is}+\Delta q_i(t))-A\sqrt{2g(h_s+\Delta h(t))}$$

$$S\frac{d\Delta h(t)}{dt}=q_{is}+\Delta q_i(t)-A\sqrt{2g}\sqrt{h_s+\Delta h(t)}\qquad \because \frac{dh_s}{dt}=0$$

$$\sqrt{h_s+\Delta h(t)}\approx\sqrt{h_s}+\frac{1}{2\sqrt{h_s}}\Delta h(t)$$

$$S\frac{d\Delta h(t)}{dt}=q_{is}+\Delta q_i(t)-A\sqrt{2g}\left\{\sqrt{h_s}+\frac{1}{2\sqrt{h_s}}\Delta h(t)\right\}$$

$$S\frac{d\Delta h(t)}{dt}=q_{is}+\Delta q_i(t)-A\sqrt{2g}\left\{\sqrt{h_s}+\frac{1}{2\sqrt{h_s}}\Delta h(t)\right\}$$

$$=q_{is}+\Delta q_i(t)-A\sqrt{2gh_s}-A\sqrt{\frac{g}{2h_s}}\Delta h(t)$$

$$q_{iS}=A\sqrt{2gh_S}$$

$$S\frac{d\Delta h(t)}{dt}=\Delta q_i(t)-A\sqrt{\frac{g}{2h_s}}\Delta h(t)$$

$$=\Delta q_i(t)-\frac{1}{R}\Delta h(t)\qquad R=\frac{1}{A}\sqrt{\frac{2h_s}{g}}$$ **：流体抵抗**

線形（近似）システム

$\Delta h(t),\ \Delta q_i(t)$ **が小さい時に有効**

他の線形化の方法（１）

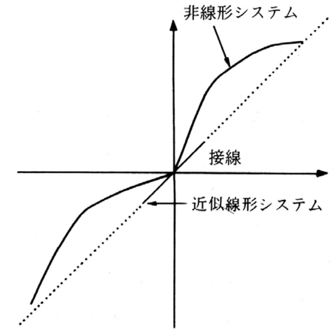


図 5.4　テーラー展開の１次近似線形化のイメージ

出典：石島ら、「非線形システム論」、計測自動制御学会

他の線形化の方法（２）

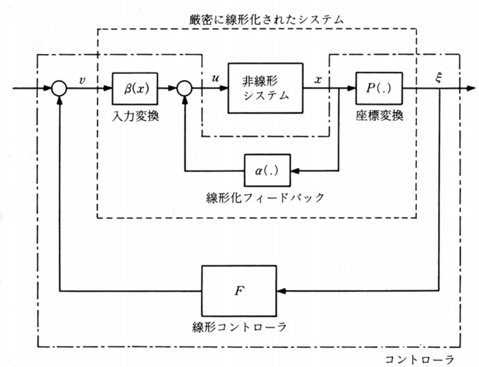


図 5.8　非線形フィードバックと座標変換による厳密な線形化を用いた制御系

出典：石島ら、「非線形システム論」、計測自動制御学会

他の線形化の方法（３）

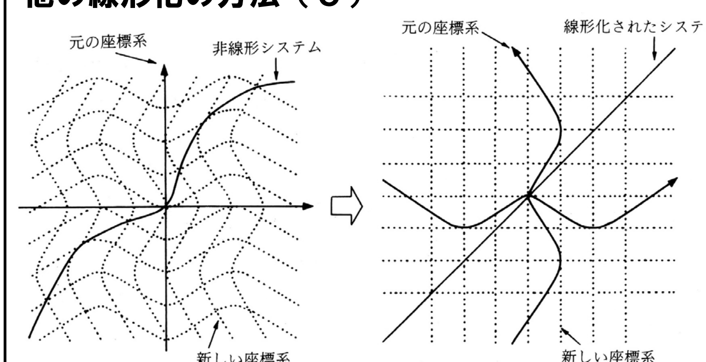


図 5.9　非線形フィードバックと座標変換による厳密な線形化のイメージ

出典：石島ら、「非線形システム論」、計測自動制御学会