システムダイナミックス

第２回　微分方程式の復習

本日の授業内容

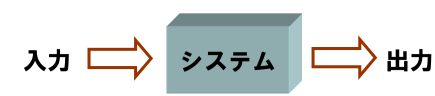
１．なぜ微分方程式？

２．微分方程式の復習

Ｑ：なぜ微分方程式？

Ａ：動的システムの数学モデルは、
微分方程式で表される。

動的システムと静的システム

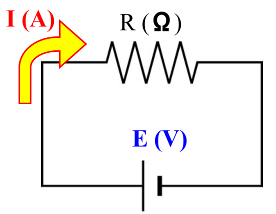


静的システム：
時刻ｔにおける出力が、その時刻ｔの入力だけで
決定されるシステム。

動的システム：
時刻ｔにおける出力が他の時刻τの入力にも依存
するシステム。

これらの特性を
スタティクス（静特性）、ダイナミクス（動特性）と呼ぶ。

静的システムの例



入力：直流電圧　E (V)
出力：直流電流　I (A)
　　　電気抵抗　R (Ω)

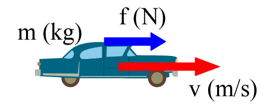
オームの法則より

$$I = \frac{1}{R}E$$

電流（出力）が、
現在時刻の電圧（入力）の
値だけによって決まる。

このような入力と出力の関係を
静特性 (statics) という。

動的システムの例



入力：加速力　f (N)
出力：速度　v (m/s)
　　　質量　m (kg)

（注）摩擦、空気抵抗などは無視

ニュートンの運動の法則

$$m\frac{dv}{dt} = f$$ ← 微分方程式

$$v(t) = v(t_0) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau$$

速度（出力）が、
現在時刻の加速力（入力）だけ
でなく、過去の値にも依存する。

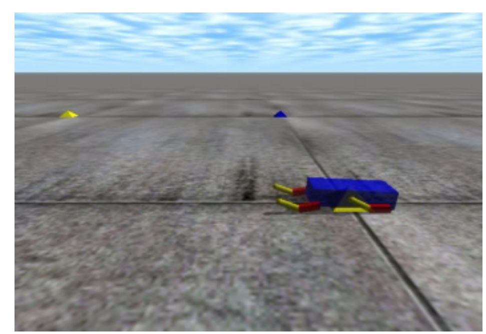
このような入力と出力の関係を
動特性 (dynamics) という。

システムダイナミックスの学習目標

1．動的システムの簡単な数学モデルを作れるようになる。
微分方程式を作る

2．数学モデルから、出力応答を計算したり、システムの特性を知ることができるようになる。
微分方程式を解く

3．制御理論を学ぶための基盤を作る。



本日の授業内容

1．なぜ微分方程式？

2．微分方程式の復習

今日復習する微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) \qquad \frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + f(t)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -ax(t) \qquad \frac{d^2x(t)}{dt^2} + p\frac{dx(t)}{dt} + qx(t) = 0$$

これだけは絶対にマスターする！

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t)$$

変数分離形

（参考）
$\exp(\lambda t) = e^{\lambda t}$
$\exp(a+b) = \exp(a)\cdot\exp(b)$
$e = 2.71828183$ ：ネイピア数

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{x(t)}\frac{dx(t)}{dt} = a$$

$$\Downarrow$$

$$\int \frac{1}{x}\frac{dx}{dt}dt = \int a dt \Rightarrow \log|x| = at + C$$

（Cは任意定数）

$$\Uparrow$$

$$x(t) = \exp(at+C) = \exp(at)\cdot\exp(C) = C'\exp(at)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t)$$

任意定数を決定する

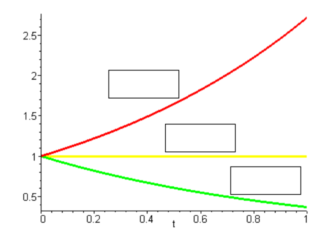
$x(t) = C'\exp(at)$

初期条件： $x(0) = 1.0$

$$x(0) = C'\exp(a\cdot 0) = C'\cdot 1 = 1.0 \qquad \therefore C' = 1.0$$

解： $x(t) = \exp(at)$

$x(t) = \exp(at)$ のグラフ



$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t)$$

変数分離法で解かなくても、
微分方程式を見れば答えはわかる。

微分方程式の意味を考える！

$x(t) \Rightarrow$ 微分 $\Rightarrow ax(t)$

今日復習する微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) \qquad \frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + f(t)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -ax(t) \qquad \frac{d^2x(t)}{dt^2} + p\frac{dx(t)}{dt} + qx(t) = 0$$

これだけは絶対にマスターする！

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -ax(t)$$

$x(t) \Rightarrow$ 微分 $\Rightarrow$ 微分 $\Rightarrow -ax(t)$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -ax(t)$$

$x(t)$ ⇨ **微分** ⇨ **微分** ⇨ $-ax(t)$

今日復習する微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) \qquad \frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + f(t)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -ax(t) \qquad \frac{d^2x(t)}{dt^2} + p\frac{dx(t)}{dt} + qx(t) = 0$$

これだけは絶対にマスターする！

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + f(t)$$

定数変化法

$\frac{dv(t)}{dt} = av(t)$ **の解は** $v(t) = C\exp(at)$ **（Cは任意定数）**

時間の関数とする

$x(t) = \boxed{C(t)}\exp(at)$ **とおく**

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{dC(t)}{dt}\exp(at) + aC(t)\exp(at)$$

を微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + f(t)$$

に代入する

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + f(t)$$

$$\frac{dC(t)}{dt}\exp(at) + \cancel{aC(t)\exp(at)} = \cancel{aC(t)\exp(at)} + f(t)$$

$$\frac{dC(t)}{dt}\exp(at) = f(t)$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = \exp(-at)f(t)$$

$C(t)$に関する微分方程式

$$C(t) = C(t_0) + \int_{t_0}^{t} \exp(-a\tau)f(\tau)d\tau$$

$$x(t) = C(t)\exp(at)$$

$$C(t) = C(t_0) + \int_{t_0}^{t} \exp(-a\tau) f(\tau) d\tau$$ **を代入**

解：

$$x(t) = \exp(at)\{C(t_0) + \int_{t_0}^{t} \exp(-a\tau) f(\tau) d\tau\}$$

$$= C(t_0)\exp(at) + \underbrace{\int_{t_0}^{t} \exp(a(t-\tau)) f(\tau) d\tau}_{\text{積分する}}$$

例題：次の微分方程式を解け。

$$\frac{dx(t)}{dt} = -2x(t) + t, \qquad x(0) = 1.0$$

$x(t) = C(t)\cdot\exp(-2t)$ **とおく**

$x(0) = C(0) = 1.0$
（初期値の計算）

$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{dC(t)}{dt}\exp(-2t) - 2C(t)\cdot\exp(-2t)$ **を微分方程式に代入**

$$\frac{dC(t)}{dt}\exp(-2t) - \cancel{2C(t)\cdot\exp(-2t)} = \cancel{-2C(t)\exp(-2t)} + t$$

$\frac{dC(t)}{dt} = t\cdot\exp(2t)$　　**$C(t)$に関する微分方程式**

$$\frac{dC(t)}{dt} = t\cdot\exp(2t)$$

$$C(t) = C(0) + \int_0^t \tau\cdot\exp(2\tau)d\tau$$

$$= 1.0 + \left[\frac{1}{2}\tau\cdot\exp(2\tau)\right]_0^t - \frac{1}{2}\int_0^t \exp(2\tau)d\tau$$ **（部分積分）**

$$= \frac{5}{4} + \frac{2t-1}{4}\exp(2t)$$

$$x(t) = C(t)\cdot\exp(-2t)$$

$$= \left\{\frac{5}{4} + \frac{2t-1}{4}\exp(2t)\right\}\cdot\exp(-2t)$$

$$= \frac{5}{4}\exp(-2t) + \frac{2t-1}{4}$$

今日復習する微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) \qquad \frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + f(t)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -ax(t) \qquad \frac{d^2x(t)}{dt^2} + p\frac{dx(t)}{dt} + qx(t) = 0$$

これだけは絶対にマスターする！

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+p\frac{dx(t)}{dt}+qx(t)=0$$

（pとqは定数）

微分方程式の解を

$\boxed{x(t)=\exp(\lambda t)}$

とおく

$$\frac{dx(t)}{dt}=\lambda\exp(\lambda t) \qquad \frac{d^2x(t)}{dt^2}=\lambda^2\exp(\lambda t)$$

微分方程式に代入

$$\lambda^2\exp(\lambda t)+p\lambda\exp(\lambda t)+q\exp(\lambda t)$$
$$=(\lambda^2+p\lambda+q)\cdot\exp(\lambda t)$$
$$=0$$

$\exp(\lambda t)\neq 0$

なので

$\underline{\underline{\lambda^2+p\lambda+q=0}}$

$x(t)=\exp(\lambda t)$ **が**

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+p\frac{dx(t)}{dt}+qx(t)=0$$

の解となるためには

$\lambda^2+p\lambda+q=0$ **を満たさねばならない**

特性方程式

特性方程式

$\lambda^2+p\lambda+q=0$ **を解くと**

$\lambda=\boxed{}$

（１）$p^2-4q>0 \Rightarrow \lambda=\alpha,\ \beta$ **（異なる実数解）**

（２）$p^2-4q=0 \Rightarrow \lambda=\alpha$ **（重解）**

（３）$p^2-4q<0 \Rightarrow \lambda=\alpha\pm j\beta$ **（共役複素解）**

j **：虚数単位**
j^2 **＝－１**

（１） 異なる実数解 $\lambda=\alpha,\ \beta$

$x(t)=\exp(\lambda t)$

$\exp(\alpha t)$ **と** $\exp(\beta t)$ **（２つの解は独立）**

$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+p\frac{dx(t)}{dt}+qx(t)=0$ **の解**

$$\boxed{x(t)=C_1\exp(\alpha t)+C_2\exp(\beta t)}$$

（C_1とC_2は任意定数）

（２）重解　$\lambda = \alpha$

$$x(t) = \exp(\lambda t)$$

$\exp(\alpha t)$ と　$t \cdot \exp(\alpha t)$ （２つの解は独立）

本当にこれでいいの？

$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + p\frac{dx(t)}{dt} + qx(t) = 0$　の解

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= C_1 \exp(\alpha t) + C_2 \cdot t \cdot \exp(\alpha t) \\ &= (C_1 + C_2 \cdot t) \cdot \exp(\alpha t) \end{aligned}}$$

（C_1とC_2は任意定数）

$x(t) = t \cdot \exp(\alpha t)$ が

$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + p\frac{dx(t)}{dt} + qx(t) = 0$　の解になることを確認

微分して方程式に代入してみる

$$\frac{d}{dt}(t \cdot \exp(\alpha t)) = \exp(\alpha t) + \alpha \cdot t \cdot \exp(\alpha t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(t \cdot \exp(\alpha t)) = 2\alpha \cdot \exp(\alpha t) + \alpha^2 \cdot t \cdot \exp(\alpha t)$$

$$\underbrace{(\alpha^2 + p\alpha + q)}_{=0} \cdot t \cdot \exp(\alpha t) + \underbrace{(2\alpha + p)}_{=0} \cdot \exp(\alpha t) = 0$$

（３）共役複素解　$\lambda = \alpha \pm j\beta$

$$x(t) = \exp(\lambda t)$$

$\exp((\alpha + j\beta)t)$ と　$\exp((\alpha - j\beta)t)$

$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + p\frac{dx(t)}{dt} + qx(t) = 0$　の解

$$\boxed{x(t) = C_1 \exp((\alpha + j\beta)t) + C_2 \exp((\alpha - j\beta)t)}$$

（C_1とC_2は任意定数）

任意定数を適切に決めなおして複素数を消す

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 \exp((\alpha + j\beta)t) + C_2 \exp((\alpha - j\beta)t) \\ &= C_1 \exp(\alpha t) \cdot \exp(j\beta t) + C_2 \exp(\alpha t) \cdot \exp(-j\beta t) \\ &= \exp(\alpha t)\{C_1 \exp(j\beta t) + C_2 \exp(-j\beta t)\} \end{aligned}$$

オイラーの公式

$$\exp(j\theta) = \cos\theta + j\sin\theta$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp(\alpha t)\{C_1(\cos(\beta t) + j\sin(\beta t)) + C_2(\cos(\beta t) - j\sin(\beta t))\} \\ &= \exp(\alpha t)\{(C_1 + C_2)\cos(\beta t) + j(C_1 - C_2)\sin(\beta t)\} \end{aligned}$$

$(C_1 + C_2)$ と $j(C_1 - C_2)$ が実数になるように

C_1 と C_2 を決める

(C_1+C_2) と $j(C_1-C_2)$ が実数になるように

C_1 と C_2 を決める

$C_1=a+jb,\ C_2=a-jb$ とおく　（aとbは実数）

$$(C_1+C_2)=a+jb+a-jb=2a$$

$$j(C_1-C_2)=j(a+jb-a+jb)=j(2jb)=-2b$$

改めて $\begin{cases}2a=C_1\\-2b=C_2\end{cases}$ とおくと

$$\boxed{x(t)=\exp(\alpha t)\{C_1\cos(\beta t)+C_2\sin(\beta t)\}}$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+p\frac{dx(t)}{dt}+qx(t)=0$$

（１）異なる実数解　$(\lambda=\alpha,\ \beta)$

$$x(t)=C_1\exp(\alpha t)+C_2\exp(\beta t)$$

（２）重解　$(\lambda=\alpha)$

$$x(t)=(C_1+C_2\cdot t)\cdot\exp(\alpha t)$$

（３）共役複素解　$(\lambda=\alpha\pm j\beta)$

$$x(t)=\exp(\alpha t)\{C_1\cos(\beta t)+C_2\sin(\beta t)\}$$

例題：次の微分方程式を解け。
また、その解のグラフを描け。

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+4\frac{dx(t)}{dt}+13x(t)=0,\qquad x(0)=1,\ \frac{dx(0)}{dt}=-2$$

特性方程式

$\lambda^2+4\lambda+13=0\qquad \lambda=-2\pm j3$

$$x(t)=C_1\exp((-2+j3)t)+C_2\exp((-2-j3)t)$$
$$=\exp(-2t)\cdot\{(C_1+C_2)\cos(3t)+j(C_1-C_2)\sin(3t)\}$$

$$x(t)=\exp(-2t)\cdot\{A\cos(3t)+B\sin(3t)\}$$

初期条件 $x(0)=1,\ dx(0)/dt=-2$ **から任意定数を求める**

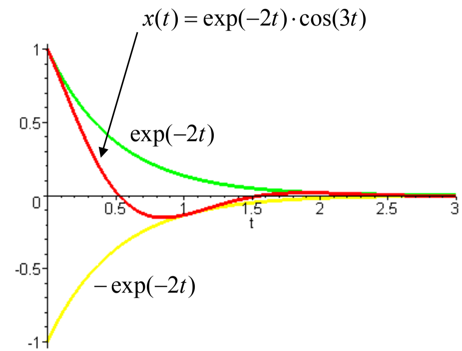
$$x(t)=\exp(-2t)\cdot\{A\cos(3t)+B\sin(3t)\}$$

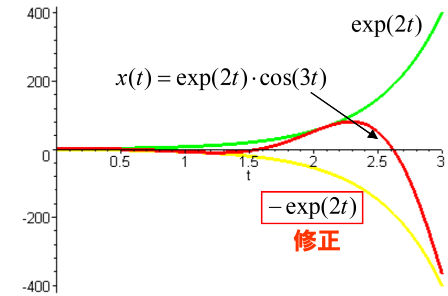
$$\frac{dx(t)}{dt}=-2\exp(-2t)\cdot\{A\cos(3t)+B\sin(3t)\}$$
$$+\exp(-2t)\cdot\{-3A\sin(3t)+3B\cos(3t)\}$$
$$=\exp(-2t)\cdot\{(3B-2A)\cos(3t)-(3A+2B)\sin(3t)\}$$

$$x(0)=\exp(-2\times0)\cdot\{A\cos(3\times0)+B\sin(3\times0)\}$$
$$=A=1\qquad\therefore A=1$$

$$\frac{dx(0)}{dt}=\exp(-2\times0)\cdot\{(3B-2A)\cos(3\times0)-(3A+2B)\sin(3\times0)\}$$
$$=3B-2A=3B-2=-2\quad\therefore B=0$$

$$\boxed{x(t)=\exp(-2t)\cdot\cos(3t)}$$





今日復習する微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) \qquad \frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + f(t)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -ax(t) \qquad \frac{d^2x(t)}{dt^2} + p\frac{dx(t)}{dt} + qx(t) = 0$$

これだけは絶対にマスターする！

来週の小テストについて

- 今日示した方法で解く
- 省略して解答を書かない
- できればグラフの概形も描く

「私はわかっていますよ」
と訴えるつもりで解答する。

アンケート

- 講義のポイントと質問を箇条書きする。
- 理解度をチェック、講義の参考にする。
- 成績には全く影響しない。

12345678　　小林　順

ポイント

- ・あいうえおかきくけこさしすせそ
- ・たちつてとなにぬねのはひふへほ
- ・・・・・

質問

- ・しつもん
- ・・・・・

練習問題：次の微分方程式を解け

（１） $$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+2\frac{dx(t)}{dt}-15x(t)=0$$

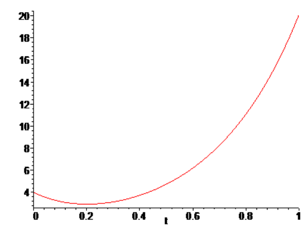
初期条件： $x(0)=4,\quad \frac{dx(0)}{dt}=-12$

（２） $$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+4\frac{dx(t)}{dt}+4x(t)=0$$

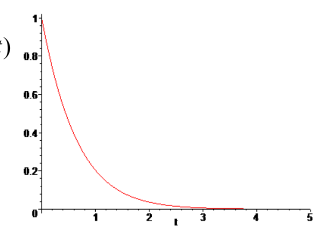
初期条件： $x(0)=1,\quad \frac{dx(0)}{dt}=-1.5$

練習問題の答え

（１） $x(t)=\exp(3t)+3\exp(-5t)$



（２） $x(t)=\exp(-2t)+\frac{1}{2}t\cdot\exp(-2t)$



４年前の小テストの問題と解答例

（１）$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+5\frac{dx(t)}{dt}+6x(t)=0,\ x(0)=1.0,\ dx(0)/dt=0.0$

特性方程式は、$\lambda^2+5\lambda+6=(\lambda+2)(\lambda+3)=0$ となり、

その解は、$\lambda=-2$ と $\lambda=-3$ である。

したがって、AとBを任意定数とすると、与えられた微分方程式の一般解は、

$$x(t)=A\exp(-2t)+B\exp(-3t)\quad\cdots（a）$$

である。

次に、一般解式（a）を微分すると、次式となる。

$$dx(t)/dt=-2A\exp(-2t)-3B\exp(-3t)\cdots（b）$$

式（a）と式（b）に初期条件を入れると、

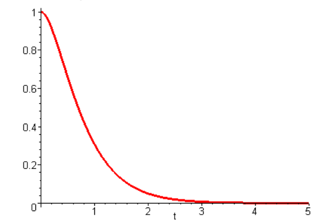
$$x(0)=A+B=1.0$$
$$dx(0)/dt=-2A-3B=0.0$$

であるので、任意定数AとBは

$$A=3,\ B=-2$$

と決まる。したがって、与えられた微分方程式の解は次式となる。

$$x(t)=3\exp(-2t)-2\exp(-3t)$$



（２）$\frac{dx(t)}{dt}=-3x(t)+1,\ x(0)=-1.0$

与えられた微分方程式の解$x(t)$を

$$x(t)=C(t)\cdot\exp(-3t)\quad\cdots（a）$$ とおく。

$C(t)$の初期条件は、$x(t)$の初期条件から $x(0)=C(0)=-1.0$ となる。

式（a）を微分すると、

$$\frac{dx(t)}{dt}=\frac{dC(t)}{dt}\cdot\exp(-3t)-3C(t)\cdot\exp(-3t)$$

となり、これを与えられた微分方程式に代入すると、

$$\frac{dC(t)}{dt}\cdot\exp(-3t)-3C(t)\cdot\exp(-3t)=-3C(t)\cdot\exp(-3t)+1$$

$$\frac{dC(t)}{dt}=\exp(3t)\quad\cdots（b）$$ となる。

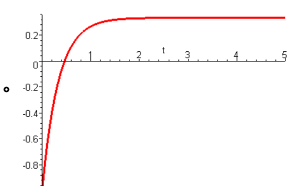
式（b）の微分方程式を解くと、

$$C(t)=C(0)+\int_0^t\exp(3\tau)d\tau=-1+\left[\frac{1}{3}\exp(3\tau)\right]_0^t$$
$$=-1+\frac{1}{3}\exp(3t)-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\exp(3t)-\frac{4}{3}$$

と、関数$C(t)$が得られ、これを式（a）に代入すれば、

$$x(t)=\left(\frac{1}{3}\exp(3t)-\frac{4}{3}\right)\cdot\exp(-3t)$$
$$=\frac{1}{3}-\frac{4}{3}\exp(-3t)$$

と、与えられた微分方程式の解が得られる。



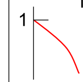
グラフを描くときに注意すること

（Ａ）初期条件に注意する。
（Ｂ）最終的（時間tが∞のとき）に、
どこに近づいていくのかに注意する。

以下の２つの例を参考にしてください。

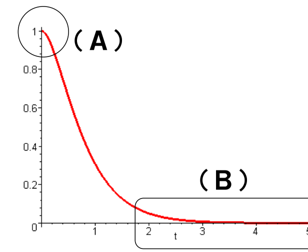
（１）$\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}+5\dfrac{dx(t)}{dt}+6x(t)=0,\ x(0)=1.0,\ dx(0)/dt=0.0$

解：$x(t)=3\exp(-2t)-2\exp(-3t)$



「こうはならないよ」
ということ。
左のグラフでは、
$dx(0)/dt<0$
になってる。

（Ａ）初期条件：$x(0)=1.0,\ dx(0)/dt=0.0$
から、グラフは1.0から傾きゼロ
（水平）で始まることがわかる。

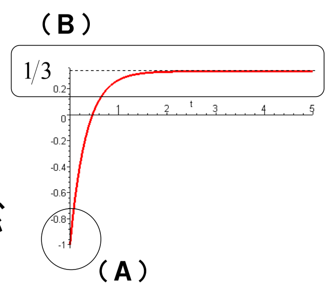


（Ｂ）
$\lim_{t\to\infty}\exp(-2t)=0$
$\lim_{t\to\infty}\exp(-3t)=0$
なので、$\lim_{t\to\infty}x(t)=0$

したがって、グラフはゼロに
収束することがわかる。

（２）$\dfrac{dx(t)}{dt}=-3x(t)+1,\ x(0)=-1.0$

解：$x(t)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{4}{3}\exp(-3t)$



（Ａ）初期条件：$x(0)=-1.0$
から、グラフは-1.0から
始まることがわかる。
また、解を１回微分して$t=0$を
代入すると、$dx(0)/dt=4$となり、
傾き正でグラフが始まることが
わかる。

（Ｂ）$\lim_{t\to\infty}\dfrac{4}{3}\exp(-3t)=0$

から、答えの第２項はゼロに
収束することがわかる。したがって、$\lim_{t\to\infty}x(t)=\dfrac{1}{3}$ である。