次の関数を２次の項までテイラー展開せよ。

また、（A）と（B）は 0 および π/2 のまわりで、

（C）は 1 のまわりで展開した場合の結果を示せ。

（A）　$f(x) = \sin(x)$　　（B）　$f(x) = \cos(x)$

（C）　$f(x) = \sqrt{x}$

$$f(x) = f(x_s + \Delta x)$$
$$\approx f(x_s) + \frac{f'(x_s)}{1!} \cdot \Delta x + \frac{f''(x_s)}{2!} \cdot \Delta x^2$$

（A） $f(x) = \sin(x)$

$f(x)$ **の１階、２階微分はそれぞれ次式となる。**

$$f'(x) = \cos(x),\quad f''(x) = -\sin(x)$$

したがって、$\sin(x)$ **を２次の項までテイラー展開すると、次のようになる。**

$$\sin(x) = \sin(x_s + \Delta x)$$
$$\approx \sin(x_s) + \cos(x_s) \cdot \Delta x - \frac{1}{2}\sin(x_s) \cdot \Delta x^2$$

$x_s = 0, \pi/2$ **のまわりで展開した場合は、それぞれ以下のようになる。**

$$\sin(x) \approx \Delta x = x \qquad \sin(x) \approx 1 - \frac{1}{2}\Delta x^2 = 1 - \frac{1}{2}(x - \pi/2)^2$$

（B） $f(x) = \cos(x)$

$f(x)$ **の１階、２階微分はそれぞれ次式となる。**

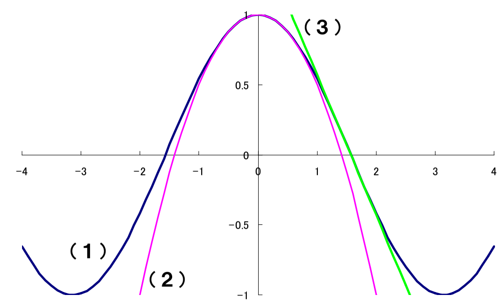
$$f'(x) = -\sin(x),\quad f''(x) = -\cos(x)$$

したがって、$\cos(x)$ **を２次の項までテイラー展開すると、次のようになる。**

$$\cos(x) = \cos(x_s + \Delta x)$$
$$\approx \cos(x_s) - \sin(x_s) \cdot \Delta x - \frac{1}{2}\cos(x_s) \cdot \Delta x^2$$

$x_s = 0, \pi/2$ **のまわりで展開した場合は、それぞれ以下のようになる。**

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{1}{2}\Delta x^2 = 1 - \frac{1}{2}x^2 \qquad \cos(x) \approx -\Delta x = -(x - \pi/2)$$



（１）　$\cos(x)$

（２）　$1 - \frac{1}{2}x^2$　（x_s=0 **近傍で近似**）

（３）　$-(x - \pi/2)$　（x_s=π/2 **近傍で近似**）

（Ｃ） $f(x)=\sqrt{x}$

$f(x)$ の１階、２階微分はそれぞれ次式となる。

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},\ f''(x)=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

したがって、$\sqrt{x}$ を２次の項までテイラー展開すると、
次のようになる。

$$\sqrt{x}=\sqrt{x_s+\Delta x}$$

$$\approx\sqrt{x_s}+\frac{1}{2\sqrt{x_s}}\Delta x-\frac{1}{8x_s\sqrt{x_s}}\Delta x^2$$

$x_{\mathrm{s}}=1$ のまわりで展開した場合は、以下のようになる。

$$\sqrt{x}\approx 1+\frac{1}{2}\Delta x-\frac{1}{8}\Delta x^2$$

$$=1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2$$