以下の微分方程式を解け。解のグラフの概形を描け。

（１） $$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+4\frac{dx(t)}{dt}+3x(t)=0$$

$$x(0)=1.0,\ dx(0)/dt=0.0$$

（２） $$\frac{dx(t)}{dt}=-2x(t)+1$$

$$x(0)=0.0$$

（１） $\frac{d^2x(t)}{dt^2}+4\frac{dx(t)}{dt}+3x(t)=0,\ x(0)=1.0,\ dx(0)/dt=0.0$

特性方程式は、$\lambda^2+4\lambda+3=(\lambda+1)(\lambda+3)=0$ となり、

その解は、 $\lambda=-1$ と $\lambda=-3$ である。

したがって、AとBを任意定数とすると、与えられた微分方程式の一般解は、

$x(t)=A\exp(-t)+B\exp(-3t)$ ・・・（ａ）

である。

次に、一般解式（a）を微分すると、次式となる。

$dx(t)/dt=-A\exp(-t)-3B\exp(-3t)$ ・・・（ｂ）

式（ａ）と式（ｂ）に初期条件を入れると、

$x(0)=A+B=1.0$

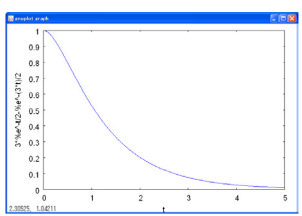
$dx(0)/dt=-A-3B=0.0$

であるので、任意定数AとBは

$A=\frac{3}{2},\ B=-\frac{1}{2}$

と決まる。したがって、与えられた微分方程式の解は次式となる。

$x(t)=\frac{3}{2}\exp(-t)-\frac{1}{2}\exp(-3t)$



（２） $\frac{dx(t)}{dt}=-2x(t)+1,\ x(0)=0.0$

与えられた微分方程式の解$x(t)$を

$x(t)=C(t)\cdot\exp(-2t)$ ・・・（ａ） とおく。

$C(t)$の初期条件は、$x(t)$の初期条件から $x(0)=C(0)=0.0$ となる。

式（ａ）を微分すると、

$\frac{dx(t)}{dt}=\frac{dC(t)}{dt}\cdot\exp(-2t)-2C(t)\cdot\exp(-2t)$

となり、これを与えられた微分方程式に代入すると、

$\frac{dC(t)}{dt}\cdot\exp(-2t)-2C(t)\cdot\exp(-2t)=-2C(t)\cdot\exp(-2t)+1$

$\frac{dC(t)}{dt}=\exp(2t)$ ・・・（ｂ） となる。

式（ｂ）の微分方程式を解くと、

$$C(t) = C(0) + \int_0^t \exp(2\tau)d\tau = \left[\frac{1}{2}\exp(2\tau)\right]_0^t$$

$$= \frac{1}{2}\{\exp(2t) - 1\}$$

と、関数$C(t)$が得られ、これを式（ａ）に代入すれば、

$$x(t) = \frac{1}{2}\{\exp(2t) - 1\} \cdot \exp(-2t)$$

$$= \frac{1}{2}\{1 - \exp(-2t)\}$$

と、与えられた微分方程式の解が得られる。